

الإحصاء العام



تليفاكس : ٤٤٨٠٠٠٤٤ - الإسكندرية

أستاذ دكتور
جابر أحمد بسيوني





الإحصاء العام

استاذ دكتور

جابر احمد بسيوني

كلية الزراعة ساها باشا

جامعة الإسكندرية

الطبعة الأولى

2014م

الناشر

دار الوفاء لدنيا الطباعة والنشر

تليفاكس : 5404480 - الإسكندرية

مقدمة:

يضم هذا الكتاب بعض الأسس والأدوات التى قد تفيد الطلاب والباحثين والعاملين فى مجال الدراسات الإحصائية ، فهى بمثابة دليل للطالب فى حل بعض المسائل الإحصائية والاستفادة منها فى تطبيق تلك المسائل فى مجال الدراسات العلمية المختلفة فى مجال العلوم الطبيعية والاجتماعية والتى تشمل علم الاقتصاد وعلم الاجتماع وعلم النفس ، وتفيد الباحث الذى يعمل فى مجال الدراسات الاجتماعية والعلوم الطبيعية فى اتخاذ بعض القرارات الخاصة بتخطيط الإنتاج والاستهلاك ومعالجة بعض مشاكل الغذاء وفى التنمية الاقتصادية والإدارة المزرعية والتسويق والتجارة الدولية وغيرها من الدراسات . كما تفيد تلك الأدوات العاملين فى مجال الدراسات الإحصائية فى توصيف بعض المدلولات الإحصائية والإشارة فى صورة رسوم بيانية تفيد سرعة إعطاء فكرة عن اتجاه تطور أى ظاهرة معينة .

ولقد سمي هذا الكتاب " الإحصاء العام " لإعطاء بعض المؤشرات أو المفاهيم التى تفيد فى توصيف وتحليل واستخلاص النتائج وتطبيقها فى شتى مجالات العلوم المختلفة . ولكى يتحقق الهدف من هذا الكتاب فقد قسمت الموضوعات المختلفة التى يضمها هذا الكتاب إلى ثمانية فصول تناول الأول منها التعريف بعلم الإحصاء وعلاقته بالعلوم الأخرى ، وتناول الفصل الثانى مراحل البحث الإحصائى ، فى حين تناول كل من الفصل الثالث والرابع مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت على الترتيب ، بينما تناول الفصل الخامس تحليل الارتباط ، وتناول الفصل السادس تحليل الانحدار ، بينما اختص الفصل السابع بمبادئ الاحتمالات ، وتناول الفصل الثامن والأخير الأرقام القياسية .

وقد روعى فى هذا الكتاب بساطة التعبير والأسلوب ليتناسب مع
دارسى المراحل الأولية للدراسات الإحصائية والاقتصادية والقياسية .
ويحتوى الكتاب على قدر كبير من الأمثلة المحلولة حتى يتيسر على
القارئ فهم الموضوعات المختلفة التى يضمها هذا الكتاب .

واعتمدت المادة العلمية لهذا الكتاب على العديد من المراجع
العربية والأجنبية. والباحث إذ يضع خبرته الطويلة فى هذا العلم كطالب
وباحث ومستفيد من حضور المؤتمرات الدولية والإقليمية والمحلية لا يصل
بهذا الكتاب إلى درجة الكمال إذ أن الكمال لله الواحد فقط ، ولا
يعفيه من الخطأ ولكنه ينشد الصواب فتلك مقدمة ومن سار على
الدرب وصل .

والله يوفقنا جميعاً إلى خدمة مصرنا الحبيبة وأمتنا العربية بكل
الخير والتقدم ، ، ،

المؤلف

الفصل الأول

تعريف علم الإحصاء
وعلاقته بالعلوم الأخرى

تمهيد :

يقصد بكلمة الإحصاء هو الحصر أو العد الدقيق لمختلف الأشياء . وعرفت الإحصاء منذ أقدم العصور ، وإن استخدام الإحصاء فى الإثبات لا تعتبر علماً حديثاً ، فقد كان مستعمل منذ القرن السابع عشر ولكن فى الشكل البدائى الذى لا يتعدى جمع البيانات الأولية واستخدامها فى صورتها الخام أو بعد تعديل طفيف للوصول إلى استنتاجات معينة الأمر الذى من شأنه أن يعرض الباحثين للوقوع فى بعض الأخطاء نتيجة الاعتماد على البيانات الأولية دون تحليلها . ولتلاشى تلك الأخطاء وضعت عدة قوانين وقواعد إحصائية تساعد الباحثين فى كيفية استخدام الأرقام التى يسجلونها عن مختلف الظواهر فى رفض أو قبول فروض معينة وتقييم النتائج التى يتوصلون إليها بأسلوب البحث الإحصائى . ولقد كثرت هذه القواعد والقوانين الإحصائية وأصبحت فى حد ذاتها حقائق ثابتة رياضياً مما جعل الإحصاء علماً قائماً بذاته وله أهمية فى علاقته بالعلوم الأخرى مثل العلوم الاجتماعية كالاقتصاد و الاجتماع والمجتمع الريفى وغير ذلك ، والعلوم الطبيعية وغيرها من العلوم التى تبحث فى الظواهر المتغيرة التى يمكن قياسها والتعبير عنها فى صورة كمية .

ويتناول هذا الفصل التعاريف المختلفة لعلم الإحصاء وخصائص ووظائف علم الإحصاء وعلاقة علم الإحصاء بالعلوم الأخرى .
تعريف علم الإحصاء وخصائصه ووظائفه :

أولاً : تعريف علم الإحصاء :

يوجد عدة تعاريف لعلم الإحصاء نذكر منها :

1- يعرف علم الإحصاء بأنه مجموعة النظريات والقوانين والقواعد المختلفة المتعلقة بتجميع وتنظيم وتلخيص وعرض وتحليل البيانات الإحصائية مثل البيانات الخاصة بالإنتاج الزراعى أو الإنتاج الصناعى أو الصادرات أو الواردات أو عدد السكان وغير ذلك من البيانات بغرض الوصول إلى استنتاجات قيمة تساعد الباحث فى الوصول إلى النتائج التى يرغبها والتنبؤ بها فى المستقبل .

2- يشير علم الإحصاء إلى المبادئ المختلفة والأساليب المتعددة المستخدمة فى جمع وتحليل وتفسير هذه البيانات وهو بهذا المفهوم يمثل الإحصاء فرعاً من فروع الرياضة التطبيقية والذى أصبح الآن علماً قائماً بذاته له أساليبه وقواعده وفروعه المختلفة .

3- هو العلم الذى يتعلق بدراسة المعلومات التى تستخدم لاتخاذ القرارات الممكنة تحت ظروف التشكك أو اللاتيقين .

مما سبق يتبين أن علم الإحصاء يتضمن الأسلوب العلمى لتقصى حقائق الظواهر بمختلف أنواعها واستخلاص النتائج عنها ، كما يتضمن أيضاً النظرية اللازمة للقياس واتخاذ القرار فى كافة الميادين الاقتصادية والاجتماعية والسياسية والعسكرية وغير ذلك .

وبمعنى آخر فإن علم الإحصاء هو العلم الذى يهتم بجمع وتنظيم وترتيب وتحليل البيانات حتى يمكن الحصول على نتائج صحيحة تساعد فى اتخاذ القرارات السليمة .

وهناك عدة فروع لعلم الإحصاء منها : (1) الإحصاء الاقتصادى ، (2) الإحصاء الرياضى ، (3) الإحصاء البيولوجى ، (4) الإحصاء

الاعلامى ، (5) الإحصاء الاجتماعى ، (6) الإحصاء الإستدلالي ،
(7) تصميم التجارب .

ثانياً : خصائص علم الإحصاء :

يمكن ذكر أهم خصائص علم الإحصاء فيما يلى:

- 1- يعتمد على حقائق كمية وعلى حقائق غير كمية (نوعية) ولكن بعد تحويلها إلى بيانات كمية .
- 2- يعتمد على حقائق جماعية وليست فردية .
- 3- يجب أن ترتبط الحقائق الجماعية ببعضها البعض من حيث تطورها مع الزمن أو وضعها بالنسبة لجميع الحقائق المناسبة لهذه المجموعات .
- 4- يهدف الإحصاء إلى الوصول إلى القيمة الحقيقية لمقاييس المجتمع المختلفة مثل متوسط درجات مادة معينة لجميع الطلاب فى نفس السنة الدراسية .

ثالثاً : وظائف علم الإحصاء :

تتلخص وظائف علم الإحصاء فيما يلى :

- 1- حصر وترتيب وتبويب البيانات سواء كان هذا الحصر شاملاً أو عن طريق العينات أو بعمل تصميم للتجارب ثم تلخيص البيانات المتحصل عليها أما فى صورة جداول أو رسومات بيانية .
- 2- التحليل الكمي والوصفي للبيانات وذلك باستخدام مختلف الطرق والأساليب الإحصائية الوصفية والكمية .

3- التفسير الإحصائي : وهو يقسم إلى نوعين

(أ) الاستتباط أو التفسير التطبيقي : وهو مبنى على تفسير ظاهرة خاصة من قانون أو ظاهرة عامة أى التطبيق من العام إلى الخاص . فمثلاً فى قانون العرض نجد أنه فى سوق معينة وخلال فترة زمنية معينة فإن الكميات المعروضة تتناسب طردياً مع سعر الوحدة بافتراض ثبات العوامل الأخرى. فمثلاً إذا زاد سعر الأسماك فمن المتوقع زيادة الكميات المنتجة منها .

(ب) الاستقراء أو التفسير الاستنتاجى : وهو التوجيه من الخاص إلى العام. ويستخدم هذا التفسير الاستنتاجى بكثرة فى العلوم البحتة مثل الكيمياء والفيزياء حيث إنه يمكن التحكم فى جميع المتغيرات فيما عدا المتغير المراد دراسته ، أما فى العلوم البيولوجية مثل العلوم الزراعية والطبيعية فإن متغير الدراسة يكون عرضه للاختلاف والتغير والتأثر بالظروف البيئية المختلفة ولذلك فما هو صحيح بالنسبة للخاص قد لا يكون صحيحاً دائماً بالنسبة للعام .

علاقة علم الإحصاء بالعلوم الأخرى :

يعتبر علم الإحصاء من العلوم الأساسية والذى يرتبط ارتباطاً وثيقاً بالعلوم الأخرى مثل الإدارة والمحاسبة والرياضة والاقتصاد وبعض العلوم الطبيعية والكيميائية والوراثية وغير ذلك من العلوم ، حيث يمكن التعرف على خصائص تلك العلوم السابق ذكرها بمساعدة علم الإحصاء ، حيث الإحصاء بفروعه المختلفة وتطورها أصبح الوسيلة القادرة على جمع البيانات وتبويبها وتحليلها وفقاً للمقاييس الإحصائية

المناسبة واستخلاص النتائج المؤثرة على العوامل موضوع الدراسة والبحث حتى يمكن معرفة العلاقة بين هذه العوامل والاستفادة منها فى البحث العلمى . ويتم ذلك من خلال العلاقة الوطيدة والتعاون بين المختصين بعلم الإحصاء والمختصين بالعلوم الأخرى حيث من خلال تعاونهم هذا اقترح الوسائل والأساليب التى تفيد فى تطوير وتحسين علم الإحصاء والعلوم الأخرى . وعلى سبيل المثال من خلال التعاون بين علماء الإحصاء والرياضة والاقتصاد تم معرفة علم الاقتصاد القياسى Econometrics.

(1) العلاقة بين علم الإحصاء وعلم الاقتصاد :

الإحصاء بطريقة وأساليبه المختلفة يساعد فى شرح كثير من الحقائق والنظريات الاقتصادية التى تم استنباطها بأسلوب الاستنتاج المنطقى ، كما يمكن استخدام تلك الأساليب الإحصائية فى تقدير النماذج الاقتصادية المختلفة مع مراعاة فروض النظرية الاقتصادية. ومن خلال علم الإحصاء يمكن الحكم على معنوية معلمات النماذج الاقتصادية التى يتم دراستها. هذا بالإضافة إلى أن علم الاقتصاد باعتباره أحد العلوم الاجتماعية التى تدرس سلوك الأفراد كمستهلكين وكمنتجين وتجار فهو يحتاج إلى جمع بيانات خاصة بالإنتاج والاستهلاك والتجارة وغيره سواء باستخدام العينات أو دراسة المجتمع بأكمله ثم تحليل هذه البيانات للوصول إلى النتائج المرغوبة وهذا كله يتم بالتعاون مع علم الإحصاء من خلال استخدام الأساليب الإحصائية اللازمة للدراسة .

(2) العلاقة بين علم الإحصاء وعلم الإدارة :

إن أهم ما يميز المدير الناجح هو القدرة على اتخاذ القرار المناسب في الوقت المناسب وهو في ذلك يحتاج إلى مجموعة من الأساليب الإحصائية الكمية التي تساعد في دراسة كل ما يتعلق بالظاهرة موضوع الدراسة وإيجاد الحلول المناسبة لها في الوقت الأمثل . وتلعب بحوث العمليات دوراً أساسياً في اتخاذ القرارات الإدارية ، كما تلعب نظرية المعايير وهي أحد الأساليب الإحصائية دوراً هاماً في كيفية التعامل مع العاملين في مجال الإدارة من خلال عمليات الاستقصاء الميداني . وباستخدام هذه المعلومات الكمية المتوافرة حول أية سياسة إدارية وبمساعدة الأساليب الإحصائية يمكن الوصول إلى قرارات إدارية هامة تفيد العاملين في مجال الإدارة . فمثلاً القرارات الخاصة بتحديد المخزون وسياساته ومعدلات دوران رأس المال كلها أشياء لا يمكن معرفة تحديدها كمياً إلا بمساعدة الأساليب الإحصائية مثل تحليل الانحدار بشقيه البسيط والمتعدد وتقدير معدلات النمو وتقدير المعادلات باستخدام النماذج الإحصائية ، ومن هنا تظهر العلاقة الوطيدة بين علم الإحصاء وعلم الإدارة .

(3) العلاقة بين علم الإحصاء وعلم المحاسبة :

الإحصاء أداة هامة لعلم المحاسبة حيث تعتمد عمليات مراجعة السجلات والدفاتر المحاسبية على اختيار عينة من المستندات تكون ممثلة لجميع المستندات ، وذلك أسلوب إحصائي له قواعده الخاصة به وعلى المحاسب القدير أن يراعى قواعد وشروط اختيار العينة . كما تستخدم المحاسبة أيضاً التوزيعات الإحصائية وطرق التقدير والاستدلال

الإحصائي في عمليات التنبؤ بفشل أو نجاح المشروعات من خلال التنبؤ بأسعار الأسهم والأرباح .

(4) العلاقة بين علم الإحصاء والرياضة :

تعتمد الإحصاء على الأدوات الرياضية سواء مثل الجبر أو غيره في حساب المقاييس الإحصائية بالإضافة إلى الإثباتات النظرية اللازمة، خصوصاً في مجال الإحصاء الرياضي، فالشخص الذي لديه معلومات رياضية يكون أقدر من غيره في التعامل مع الإحصاء والتعمق فيها والعمل على تطويرها . كما تحتاج الرياضيات إلى الأدوات الإحصائية في كثير من الأمور مثل استخدام النظريات الرياضية وتطويرها لتلائم واقع الحياة العملية .

(5) العلاقة بين علم الإحصاء وعلم الرياضة وعلم الاقتصاد :

كما ذكر سابقاً نتيجة للتعاون الوثيق بين الرياضة والإحصاء والاقتصاد أمكن الوصول إلى علم حديث يسمى علم الاقتصاد القياسي Econometrics وهو مزيج بين الثلاثة فروع المختلفة من العلم وهذا العلم ساعد كثيراً في تطوير علم الاقتصاد من علم بحث إلى علم تطبيقي ساعد كثيراً على إيجاد حلول لبعض المشاكل الاقتصادية .

الفصل الثاني

مراحل البحث الإحصائي

يتعين على الباحث عند عمل بحث معين إجراء خطوات رئيسية لدراسة تأثير عامل أو عدة عوامل على ظاهرة معينة وعلاقة ذلك بالظواهر الأخرى .

ويمكن تلخيص خطوات أو مراحل البحث الإحصائي فى الآتى :

(1) تحديد الهدف من البحث أو وضع الفروض الإحصائية :

يقصد بالفرض الإحصائي بأنه تفسير مبدئي للظاهرة موضوع الدراسة ، ويحتاج الفرض إلى بيانات يتم جمعها وتحليلها وفى ذلك يقرر الباحث إما قبول الفرض أو رفضه وبدأ البحث عن الفرض البديل فى ضوء البيانات المتاحة للباحث والتي تم جمعها عن الظاهرة موضوع الدراسة . ومن خلال الفروض يتم تحديد الهدف من الدراسة وتحديد الجداول الإحصائية اللازمة حيث ذلك يساعد الباحث على تحديد البيانات اللازم جمعها .

(2) تحديد المجتمع المراد جمع البيانات عنه :

يقصد بالمجتمع مجموع المفردات التى يتم جمع البيانات عنها . والمفردات التى تمثل وحدة جمع البيانات فمثلاً مجموع وثائق التأمين على الحياة بكافة أنواعه تمثل المجتمع موضوع الدراسة وكل وثيقة تأمين تمثل وحدة مجتمع الدراسة .

(3) تحديد مصادر البيانات :

هناك نوعين من مصادر البيانات منها :

(أ) مصادر ثانوية : وهى بيانات سبق جمعها وحفظها ونشرها فى سجلات مثل نشرات الاقتصاد الزراعى التى يصدرها معهد بحوث

الإقتصاد الزراعي بوزارة الزراعة وإستصلاح الأراضي قطاع الشؤون الإقتصادية ، والنشرات الإحصائية التي يصدرها الجهاز المركزي للتعبئة العامة والإحصاء ، ومنظمة الأغذية والزراعة (الفاو) وهذه البيانات تتعلق بالظاهرة موضوع الدراسة سواء كانت بيانات عن المساحة الزراعية أو الإنتاج الزراعي أو الدخل الزراعي أو عدد السكان أو الدخل القومي أو الإنتاج القومي أو الاستهلاك القومي وغير ذلك من البيانات .

(ب) مصادر أولية وميدانية : ويقصد بها جمع البيانات من مصادرها الأصلية وذلك بأحد الطرق المتعارف عليها سواء عن طريق المقابلة الشخصية أو بالبريد أو التليفون أو الفاكس أو عن طريق الإنترنت وهي أحدث طرق جمع البيانات .

(4) التجهيز لعملية جمع البيانات الميدانية :

ويتطلب ذلك عدة مراحل منها :

(أ) تصميم استمارة جمع البيانات : وهي ما تعرف باستمارة الاستبيان ويجب أن يراعى فيها الآتى :

1- أن تكون أسئلة الاستمارة معبرة عن جميع البيانات المطلوب جمعها واللازمة للدراسة .

2- يراعى فيها التسلسل المنطقي وصياغة الأسئلة بطريقة سهلة ويفهمها المبحوث.

3- وضع الأسئلة بحيث تكون الإجابة عليها بنعم أو لا أو يعبر عنها بصورة رقمية.

- 4- لا تسبب الأسئلة أى حرج للمبحوث .
- 5- أن يقر الباحث بأن الأسئلة الموجودة باستمارة الاستبيان سرية ولأغراض البحث العلمى فقط .
- (ب) تحديد الأسلوب المناسب لجمع البيانات : يوجد أسلوبان لجمع البيانات هما :
- 1- الحصر الشامل: وفيه يتم جمع البيانات من جميع مفردات المجتمع موضوع الدراسة .
 - 2- العينة : وفيه يتم جمع البيانات من بعض مفردات المجتمع .
- وتوجد عدة اعتبارات لتحديد الأسلوب المناسب لجمع البيانات نذكر منها:
- نوع المجتمع : فإذا كان المجتمع محدوداً ويمكن حصر مفرداته فيتم اللجوء إلى استخدام الحصر الشامل لمفردات المجتمع. أما إذا كان المجتمع غير محدود ويصعب حصر مفرداته فيتم اللجوء إلى استخدام أسلوب العينة .
 - طبيعة الظاهرة موضوع الدراسة : إذا كانت الظاهرة عرضة للفساد أو التلف مثل عمل التجارب على الأسماك أو الخضر أو الفاكهة فيلزم استخدام أسلوب العينة.
 - الوقت : يحتاج أسلوب الحصر الشامل إلى وقت كبير بالمقارنة بأسلوب العينة فإذا كان الباحث يريد الحصول على نتائج بسرعة فيستخدم أسلوب العينة .

- الإمكانات المادية للباحث : أسلوب الحصر الشامل يحتاج إلى موارد مادية كبيرة بالمقارنة بأسلوب العينة .
- إعداد القائمين بجمع البيانات : تحديد واجبات واختصاصات كل منهم للحصول على البيانات على أكمل وجه .
- تهيئة المجتمع للعملية الميدانية الخاصة بجمع البيانات : حيث يتم الإعلان عن طريق أحد وسائل الإعلام المختلفة مثل الإذاعة والتلفزيون والصحف والمجلات ، حتى يكسب ثقة أفراد المجتمع للحصول على بيانات صحيحة .

(5) تصنيف وتجهيز البيانات :

- بعد الانتهاء من جمع البيانات من خلال استمارة الاستبيان يتم عمل الجداول الإحصائية المناسبة لتفريغ البيانات وتجهيزها للتحليل الإحصائي ، ويتم ذلك من خلال الخطوات الآتية :
- مراجعة استمارة الاستبيان للتأكد من أن جميع الأسئلة قد تم الإجابة عليها بطريقة صحيحة وواضحة .
 - فرز وتبويب البيانات من خلال استخراج الجداول الإحصائية .

(6) عرض البيانات وتحليلها إحصائياً :

- التمثيل البياني للبيانات باستخدام الأعمدة أو الخطوط المنكسرة أو الدائرة .
- تلخيص البيانات في صورة مقاييس إحصائية مثل مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت .

- إجراء بعض الاختبارات الإحصائية للوصول إلى قرار برفض أو قبول الفرض الإحصائي الذي إفترضه الباحث كتفسير مبدئي للظاهرة موضع الدراسة .

العينات Samples

العينة جزء من المجتمع يتم اختيارها بطريقة عشوائية وغير متحيزة لكي يتم دراستها للتعرف على خصائص المجتمع الذي سحبت منه العينة. ويتميز أسلوب العينة بعدد من المميزات منها :

- 1- يعطى نتائج سريعة بسبب سرعة الحصول على البيانات وتحليلها .
- 2- توفر الوقت والجهد والتكاليف .
- 3- فى بعض البحوث تعتبر العينات الأسلوب الإحصائي الوحيد مثل عمل تجارب دواء جديد على بعض الحيوانات وغيره من الأمثلة العديدة .

ولسحب عينة يجب أن يتوافر الآتى :

- 1- الوضوح فى تعريف المجتمع .
- 2- عدم التكرار لأى مفردة من مفردات المجتمع .
- 3- أن تكون العينة بدرجة كبيرة لكى تشمل كل أفراد المجتمع .
- 4- أن يكون اختيار العينة عشوائياً بمعنى أن تتاح لكل فرد من أفراد المجتمع فرصة الاختيار فى العينة .

أنواع العينات :

تختلف أنواع العينات تبعاً لاختلاف خصائص المجتمع المراد دراسته . ويمكن تقسيم العينات بصفة عامة إلى :

أولاً : العينات الاحتمالية Probability Samples

ويمكن تعريفها بأنها العينات التي يتم اختيار مقدراتها بأسلوب يوفر لكل وحدة من وحدات المعاينة مجتمع الدراسة احتمالاً ثابتاً ومحددأ لاختيار العينة بحيث لا يتدخل الباحث في عملية الاختيار بل يتم عشوائياً، ويمكن من خلال العينات الاحتمالية حساب أخطاء المعاينة وكذلك الاستدلال الإحصائي وتعميم النتائج . وتقسم العينات الاحتمالية إلى:

(أ) العينة العشوائية البسيطة Simple Random Sample :

وهذا النوع من العينات من أبسط أنواعها ويقصد بالعشوائية بأنه يكون لكل فرد من مقدرات المجتمع نفس فرصة الاختيار ضمن العينة. وتتم عملية الاختيار بأن توضع لكل مفردة رقم معين وتخلط الأرقام مع بعضها خلطاً جيداً ثم يتم سحب عدد مقدرات العينة بطريقة عشوائية بطريقة السلة أو بطريقة جداول الأرقام العشوائية أو باستخدام الحاسب الآلي .

وتعتبر العينة العشوائية البسيطة سهلة الاختيار في حالة المجتمعات الصغيرة ويصعب استخدامها في المجتمعات الطبقيية حيث لا تضمن تمثيل كل طبقة من هذه الطبقات بنفس نسبتها في المجتمع .

(ب) العينة العشوائية المنتظمة Systematic Random Sample

يمكن تلخيص خطوات سحب العينة العشوائية المنتظمة في تقسيم المجتمع إلى عدد من الفئات المتساوية الطول ثم يتم اختيار مفردة عشوائية من المجموعة الأولى ونحدد ترتيبها في المجموعة ثم نحصل على

بقية المفردات بإضافة طول الفئة على التوالى . وذلك كما يتضح من المثال التالى :

مثال : المطلوب اختيار عينة عشوائية منتظمة عدد مفرداتها يساوى (10) مفردات من بين مجتمع عدد مفرداته (200) مفردة .

الحل : يوجد لدينا 200 مفردة يتم تقسيمها إلى 10 فئات، طول الفئة يساوى 20 كالاتى :

1 – 20
20 – 40
40 – 60
:
:
:
180 – 200

ثم نقوم باختيار مفردة واحدة من المجموعة الأولى بطريقة عشوائية بفرض اختيار الرقم (6) ثم نقوم بتحديد باقى مفردات العينة بإضافة طول الفئة (20) على الرقم (6) فتحصل على 10 مفردات بالأرقام 6 ، 26 ، 46 ، 66 ، 86 ، 106 ، 126 ، 146 ، 166 ، 186 وهذه الأرقام تمثل مفردات العينة المأخوذة من المجتمع المكون من 200 مفردة .

ويلاحظ أن هذا الأسلوب فى اختيار العينات يحتاج إلى تكاليف وجهد أقل من العينة العشوائية البسيطة السابق ذكرها .

وتتميز بالآتى :

- 1- عنصر العشوائية المتمثل فى اختيار المفردة .
- 2- عنصر الانتظام المتمثل فى اختيار باقى المفردات .

(ج) العينة الطباقية Layer Sample

وفقاً لهذا الأسلوب يتم تقسيم المجتمع إلى طبقات متجانسة ثم اختيار عدد من المفردات من كل طبقة ليكون حجم العينة الكلى مكون من عدد من المفردات من كل طبقة ككل . وتمثل العينة فى هذه الحالة المجتمع تمثيلاً دقيقاً لأنها تأخذ فى الاعتبار جميع الطبقات وفقاً لحجم كل منها .

(د) العينة متعددة المراحل Multi- Stage Sample

يتم اختيار العينة وفقاً لهذا الأسلوب على عدة مراحل ، ويستخدم هذا النوع من العينات فى حالة ما إذا كان حجم المجتمع كبير جداً ويتكون من أقسام غير متجانسة فيما بينها ، فيتم اختيار عينة عشوائية من هذه الأقسام ، وقد يكون كل قسم مقسم إلى أقسام فيتم اختيار عينة عشوائية من كل منها وهكذا. فمثلاً عند دراسة تصنيف الأراضى الزراعية فى جمهورية مصر العربية يتم اختيار عدد من محافظات الجمهورية ويتم اختيار عدد من المراكز داخل كل محافظة ثم يتم عدد من القرى داخل كل مركز ليتم دراسة التصنيف .

ثانياً : العينات غير الاحتمالية Non Probability Samples

تعرف العينة غير الاحتمالية بأنها التى يتم اختيار مفرداتها بطريقة غير طريقة الاحتمالات ، حيث يعتمد الباحث اختيار مفردات معينة ، ولذلك تعرف فى بعض الأحيان بأنها العينة العمدية . وفى العينات غير الاحتمالية لا يمكن حساب أخطاء المعاينة أو الاستدلال الإحصائى أو تعميم النتائج . ومن أهم أنواع العينات غير الاحتمالية عينة الحصص وتستخدم غالباً فى دراسات السوق والرأى العام ، وفيها يتم تحديد

حصص معينة تمثل مجتمع الدراسة تمثيلاً نسبياً ، ويعتمد تحديد الحصص على التقدير الشخصي وخبرة الباحث ، ويتم اختيار مفردات العينة من داخل كل قسم بطريقة عمدية أو غير عشوائية .

أسئلة

- 1- أذكر تعريفاً مناسباً لعلم الإحصاء ؟
- 2- أذكر أهم خصائص ووظائف الإحصاء ؟
- 3- تكلم باختصار عن مراحل أو خطوات البحث العلمي ؟
- 4- ما هو المقصود بالعينة موضحاً أنواع العينات ؟

أنواع الأخطاء :

قد يقع الباحث فى خطأ عند جمع البيانات ، فمثلاً جمع البيانات عن طريق أسلوب العينة قد يؤدي إلى الوقوع فى خطأ يسمى بخطأ المعاينة . وهناك أخطاء يقع فيها الباحث سواء استخدم أسلوب الحصر الشامل أو أسلوب العينة وتسمى بأخطاء التحيز .

أولاً : أخطاء المعاينة :

وتنشأ هذه الأخطاء نتيجة لعوامل الصدفة البحتة نظراً لاختلاف أسلوب العينة عن نتائج أسلوب الحصر الشامل . ويمكن قياس أخطاء المعاينة كمياً ومن ثم يمكن تقديرها . وتقل أخطاء المعاينة كلما زاد حجم العينة .

ثانياً : أخطاء التحيز :

- وهى الأخطاء التى يقع فيها الباحث سواء استخدم أسلوب الحصر الشامل أو أسلوب العينة خلال جميع مراحل البحث ومن أمثلتها:
 - عدم تحديد المشكلة تحديداً دقيقاً .
 - الحصول على بيانات غير دقيقة فى جمع البيانات نتيجة لاعتماد الباحث على مصادر غير موثوق فيها .
 - عدم صياغة الأسئلة فى استمارة البحث بطريقة سليمة مما يترتب عليه جمع بيانات خطأ .
 - أخطاء فى فرز وتبويب البيانات .
 - أخطاء فى استخدام المقاييس الإحصائية المناسبة .

تبويب وعرض البيانات الإحصائية

فى كثير من الأحيان تكون البيانات التى قام الباحث بجمعها كبيرة لدرجة تعذر استخلاص حقائق معينة منها. لذا يقوم الباحث بترتيبها وعرضها بطريقة منتظمة تساعد على توضيح أهميتها والتعرف على خواصها وسهولة تحليلها إحصائياً. وهناك عدة طرق مختلفة لعرض البيانات من أهمها العرض الجدولى والعرض البيانى .

أولاً: العرض الجدولى :

يتم عرض بيانات الظاهرة موضوع الدراسة فى جدول، وقد يكون هذا الجدول بسيط بحيث يتم فيه عرض ظاهرة واحدة فقط أو جدول مزدوج ويعرض فيه ظاهرتين أو جدول مركب لأكثر من ظاهرة .
وتقسم الجداول الإحصائية من حيث أغراضها إلى الآتى :

(1) جداول عامة :

وهى عبارة عن الجداول التى يكتفى بتفريغ البيانات فيها دون الحاجة إلى تحليلها مثل بيانات التعداد السكانى من مواليد أو التركيب السكانى (ذكور و إناث) أو حجم الإنتاج الصناعى أو الزراعى وهكذا ... ويكون الغرض من الجداول العامة هو الاستفادة منها كمصدر للبيانات للاستفادة منها عند عمل الجداول الخاصة.

(2) جداول خاصة :

وتستخلص بياناتها من الجداول العامة ويعاد ترتيب تلك البيانات فى جداول خاصة بغرض إجراء بحث معين لإبراز أهمية الظاهرة موضوع الدراسة بصورة بسيطة وواضحة .

(3) جدول التوزيع التكرارى :

إن أول خطوة يقوم بها الباحث لتخليص البيانات وتبسيطها تمهيداً لتحليلها بالأساليب الإحصائية المختلفة هو إعداد الجداول التكرارية . وفيها يتم تجميع البيانات المتشابهة مع بعضها فى مجموعات ووضع كل مفردة فى المجموعة التى تنتمى إليها ، وبذلك نحصل على التكرارات المناظرة لكل فئة . ولذلك فإن جدول التوزيع التكرارى يتكون من عمودين أحدهما للفئات والآخر للتكرار . ويمكن توضيح ذلك من المثال التالى :

مثال : عند عمل الاختبار الشخصى لـ 50 طالب وطالبة تمهيداً لالتحاقهم بشعبة الإعلام بكلية الآداب حصلنا على الدرجات الآتية (الدرجة من 100).

| | | | | |
|-----------|-----------|----|----|----|
| 85 | 67 | 55 | 41 | 62 |
| 42 | 78 | 48 | 79 | 87 |
| 45 | 36 | 82 | 49 | 67 |
| 25 | 62 | 58 | 57 | 59 |
| 47 | 46 | 63 | 90 | 69 |
| 83 | <u>12</u> | 48 | 72 | 68 |
| 22 | 58 | 77 | 46 | 66 |
| 62 | 27 | 38 | 48 | 85 |
| <u>94</u> | 67 | 27 | 83 | 85 |
| 66 | 43 | 69 | 32 | 88 |

المطلوب عمل جدول تكرارى لهذه البيانات.

خطوات الحل :

1- نعين المدى Range وهو يمثل الفرق بين أكبر قيمة وأقل قيمة فى

$$\text{البيانات المعطاه وعليه فإن المدى} = 94 - 12 = 82$$

2- نعين عدد الأقسام أو عدد الفئات وفقاً لمعادلة يول Yule

$$\text{عدد الفئات} = 2.5 \sqrt[4]{n} \quad \text{حيث } n = \text{عدد القيم}$$

$$= 2.5 \sqrt[4]{50} = 7 \text{ تقريباً}$$

ويفضل ألا يقل عدد الفئات عن 3 ولا يزيد عن 20 فئة

3- نعين طول الفئة = المدى ÷ عدد الفئات

$$= 82 \div 7 = 12 \text{ تقريباً}$$

4- نعين حدود الفئات : بالنسبة للحد الأدنى للفئة الأولى يجب أن يكون أقل بمقدار واحد عن أقل رقم فى البيانات. وبالنسبة للفئة الأخيرة يجب أن يكون الحد الأعلى لها أكبر من أكبر رقم فى البيانات ولو بمقدار واحد .

5- تكوين العلامات .

$$6- \text{نعين مركز الفئة} = \frac{\text{الحد الأدنى للفئة} + \text{الحد الأعلى للفئة}}{2}$$

7- نحسب التكرار النسبى وهو ناتج من قسمة تكرار كل فئة على مجموع التكرارات الكلية . ويجب أن يكون مجموع التكرارات النسبية مساوياً للواحد الصحيح .

جدول التوزيع التكرارى

| الفئات | العلامات | التكرار | التكرار النسبى % | مركز الفئة |
|---------|--------------|---------|------------------|------------|
| 23-11 | 1 1 | 2 | 0.04 | 17 |
| 35-23 | 1 1 1 | 3 | 0.06 | 29 |
| 47-35 | 111 1111 | 8 | 0.16 | 41 |
| 59-47 | 1111 1111 | 9 | 0.18 | 53 |
| 71-59 | 11 1111 1111 | 12 | 0.24 | 65 |
| 83-71 | 1111 | 4 | 0.08 | 77 |
| 95-83 | 11 1111 1111 | 12 | 0.24 | 89 |
| المجموع | | 50 | 1.00 | |

ويلاحظ أن الفئة 23-11 تقرأ من 11 إلى أقل من 23 ولا يصح تقسيم الفئات كالاتى :

11-23 ، 24-36 ، حيث الرقم 23.5 لا يوجد ضمن أى من الفئتين .

كما قد تكتب الفئات هكذا

-11

-23

-35 وهكذا

وذلك على اعتبار أن بداية كل فئة هى نهاية الفئة السابقة لها مباشرة.

ويلاحظ أن الجدول التكرارى السابق يسمى جدول منتظم لأن

أطوال الفئات متساوية ومغلق لأن الحد الأعلى للفئة الأخيرة معلوم .

ولكن قد توجد بعض الجداول التكرارية غير المنتظمة

والمفتوحة ومثال ذلك الجدول التكرارى التالى :

| الفئات | -30 | -40 | -60 | -90 | -100 | -130 |
|---------|-----|-----|-----|-----|------|------|
| التكرار | 4 | 8 | 12 | 6 | 5 | 2 |

وقد تكون بعض الجداول التكرارية غير منتظمة (أى أطوال فئاتها غير متساوية) ومغلقة (أى الحد الأعلى لأخر فئة معلوم) وذلك مثل الجدول التكرارى التالى :

| الفئات | -10 | -30 | -80 | -100 | 200-120 |
|---------|-----|-----|-----|------|---------|
| التكرار | 10 | 18 | 30 | 15 | 6 |

كما أن هناك الجداول التكرارية المزدوجة وهى التى يرصد فيها بيان عن ظاهرتين مختلفتين مثل تقديرات مجموعة من الطلبة فى مادتى الإحصاء والرياضة كالتالى :

| الرياضة الإحصاء | ممتاز | جيد جداً | جيد | مقبول | ضعيف | المجموع |
|--------------------|-------|----------|-----|-------|------|---------|
| ممتاز | 3 | 4 | | | | 7 |
| جيد جداً | 6 | 2 | 5 | 1 | | 13 |
| جيد | 2 | | 3 | | 1 | 6 |
| مقبول | | 3 | | 3 | 2 | 5 |
| ضعيف | | | | | | 4 |
| المجموع | 11 | 9 | 8 | 4 | 3 | 35 |

الجدول التكرارية المتجمعة :

يوجد نوعان من الجداول التكرارية المتجمعة هما الجدول التكرارى المتجمع الصاعد والجدول التكرارى المتجمع الهابط .

أولاً التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد :

ويكون الغرض منه معرفة عدد المفردات أو القيم التى تقل عن قيمه معينه (أقل من بداية كل فئة) وقيمته أول تكرار متجمع صاعد تساوى صفر وأخر قيمه للتكرار المتجمع الصاعد تساوى مجموع التكرارات .

مثال : كون جدول تكرارى متجمع صاعد للجدول التكرارى التالى :

| الفئات | -10 | -20 | -30 | -40 | -50 | 60-70 | المجموع |
|---------|-----|-----|-----|-----|-----|-------|---------|
| التكرار | 5 | 10 | 20 | 25 | 35 | 5 | 100 |

جدول التكرار النسبى المتجمع الصاعد

الجدول التكرارى المتجمع

الصاعد

| الفئات | التكرار المتجمع | الفئات | التكرار المتجمع النسبى |
|-----------|-----------------|-----------|------------------------|
| أقل من 10 | 0 | أقل من 10 | 0 |
| أقل من 20 | 5 | أقل من 20 | 0.05 |
| أقل من 30 | 15 | أقل من 30 | 0.15 |
| أقل من 40 | 35 | أقل من 40 | 0.35 |
| أقل من 50 | 60 | أقل من 50 | 0.60 |
| أقل من 60 | 95 | أقل من 60 | 0.95 |
| أقل من 70 | 100 | أقل من 70 | 1.00 |

ثانياً : التوزيع التكرارى المتجمع الهابط :

ويكون الغرض منه معرفة عدد القيم أو المفردات التى تزيد عن قيمه معينه. ويلاحظ أن الفئة الأولى من جدول التوزيع التكرارى المتجمع الهابط تساوى مجموع التكرارات . بينما الفئة الأخيرة تكون مساوية للصفر وذلك عكس جدول التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد . والمثال التالى يوضح ذلك :

مثال : المطلوب عمل الجدول التكرارى المتجمع الهابط من المثال السابق

| الجدول التكرارى المتجمع الهابط | | جدول التكرار النسبى المتجمع الهابط | |
|--------------------------------|-----------------|------------------------------------|------------------------|
| الفئات | التكرار المتجمع | الفئات | التكرار المتجمع النسبى |
| 10 فاكتر | 100 | 10 فاكتر | 1.00 |
| 20 فاكتر | 95 | 20 فاكتر | 0.95 |
| 30 فاكتر | 85 | 30 فاكتر | 0.85 |
| 40 فاكتر | 65 | 40 فاكتر | 0.65 |
| 50 فاكتر | 40 | 50 فاكتر | 0.40 |
| 60 فاكتر | 5 | 60 فاكتر | 0.05 |
| 70 فاكتر | 0 | 70 فاكتر | 0 |

ثانياً : التمثيل البيانى :

تختلف طرق التمثيل البيانى باختلاف نوع البيانات ففى حالة البيانات الخام والمطلقة (غير المبوبة فى شكل جدول تكرارى) والتى تشمل السلاسل الزمنية للظواهر المختلفة فتوجد عدة طرق لتمثيلها بيانياً منها :

- 1- طريقة الخط البيانى .
- 2- طريقة الأعمدة .
- 3- طريقة الدوائر .

أما فى حالة البيانات المبوبة فى شكل جدول توزيع تكرارى فتوجد عدة طرق لتمثيلها بيانياً منها :

- 1- المدرج التكرارى .
- 2- المضلع التكرارى .
- 3- المنحنى التكرارى .
- 4- المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد .

5- المنحنى التكرارى المتجمع الهابط

وسوف يتم تناول كل منها على حدة .

(1) الرسوم البيانية فى حالة القيم المطلقة غير المبوبة :

(أ) الخط البيانى :

وهو يمثل العلاقة بين متغيرين فإذا كان أحد المتغيرين هو الزمن فيمثل على المحور الأفقى وكان المتغير الآخر يمثل الظاهرة موضوع الدراسة فيوضع على المحور الرأسى . ويمكن المقارنة بين أكثر من ظاهرة باستخدام نفس الرسم البيانى .

مثال : الجدول التالى يوضح الأسعار المزرعية والأسعار التقديرية لمحصول القطن المصرى خلال الفترة 1985-1991 والمطلوب تمثيلها بيانياً بطريقة الخط البيانى .

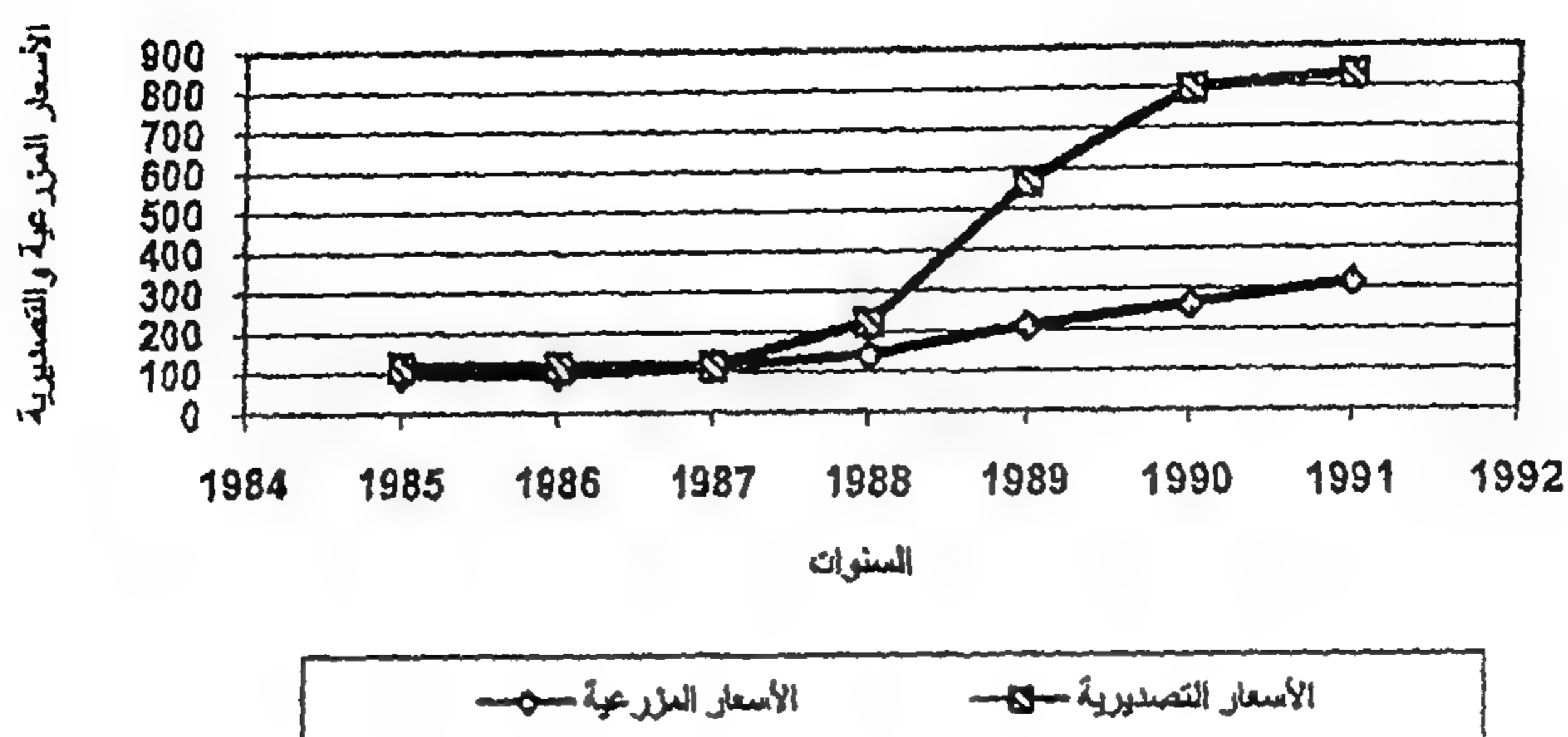
جدول (1) : تطور الأسعار المزرعية والتصديرية للقطن المصرى خلال الفترة 1985-1991

(جنيه / قنطار)

| السنوات | الأسعار المزرعية | الأسعار التصديرية |
|---------|------------------|-------------------|
| 1985 | 96.9 | 116.5 |
| 1986 | 97.1 | 118.7 |
| 1987 | 114.3 | 117.6 |
| 1988 | 143.5 | 222.9 |
| 1989 | 210.7 | 570.1 |
| 1990 | 262.7 | 797.4 |
| 1991 | 316.1 | 831.0 |

المصدر : الجهاز المركزى للتعبئة العامة والإحصاء ، النشرة السنوية للتجارة الخارجية ، القاهرة ، أعداد متفرقة .

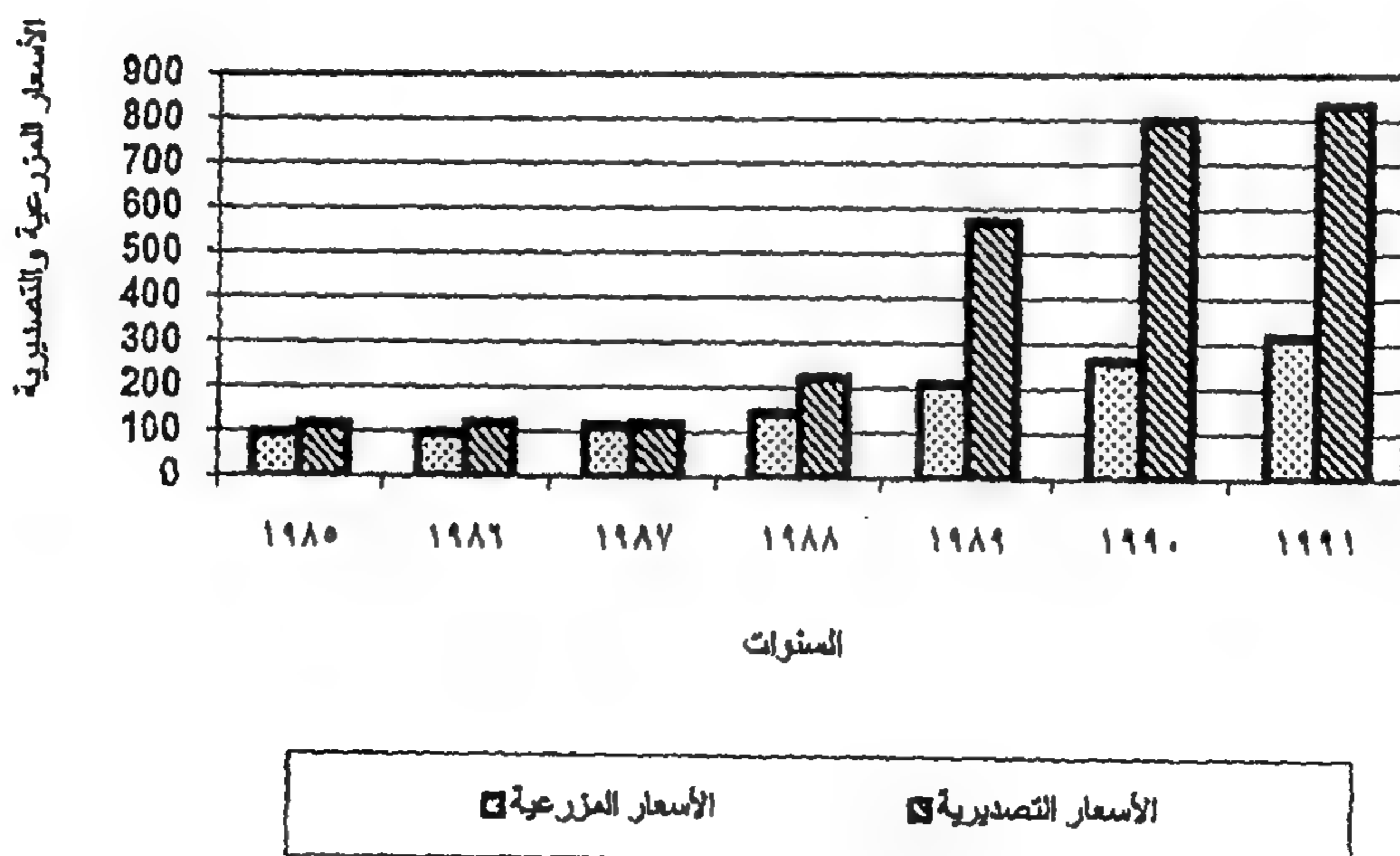
شكل (١) تطور الأسعار المزرعية والتصديرية لمحصول القطن المصري



(ب) الأعمدة البيانية :

طريقة الأعمدة البيانية من أكثر الطرق انتشاراً لسهولة استخدامها ورسمها ووفقاً لهذه الطريقة تتناسب الأعمدة البيانية في طولها مع الأعداد الممثلة لها بمعنى أن طول العمود يتناسب طردياً مع العدد الممثل له . والمثال التالي يوضح ذلك .

شكل (٢) تطور الأسعار المزرعية والتصديرية لمحصول القطن المصري



مثال : استخدم بيانات المثال السابق لتمثيلها بطريقة الأعمدة

(ج) طريقة الدائرة :

وفقاً لهذه الطريقة تقسم الدائرة إلى عدد من الأقسام بحيث تتناسب مساحة كل قسم مع أحد مكونات الظاهرة ويفضل إعطاء كل قسم لون مختلف عن الآخر لسهولة التمييز.

ويمكن تقسيم الدائرة إلى أقسام بمعلومية أن مجموع درجات الدائرة 360 درجة ولإيجاد الزاوية المركزية لكل قسم أو جزء يتم وفقاً للقاعدة التالية :

$$\text{الزاوية المركزية} = 360^\circ \times \frac{\text{قيمة الجزء}}{\text{مجموع الأجزاء الكلية}}$$

والمثال التالي يوضح ذلك .

مثال : الجدول التالي يوضح التوزيع الجغرافى للمتوسط السنوى للصادرات من محصول البطاطس خلال الفترة (1991-87)

جدول (2) : التوزيع الجغرافى لصادرات مصر من البطاطس خلال الفترة (1991-87) بالآلف طن .

| الدولة | متوسط الصادرات بالآلف طن |
|----------|--------------------------|
| إنجلترا | 80 |
| فرنسا | 6 |
| اليونان | 12 |
| السعودية | 27 |
| لبنان | 9 |
| دول أخرى | 26 |
| الجملة | 160 |

المصدر : الجهاز المركزى للتعبئة العامة والإحصاء ، النشرة الشهرية للتجارة الخارجية ، أعداد متفرقة.

الحل : نحصل أولاً على الزاوية المركزية لكل دولة

$$\text{الزاوية المركزية لإنجلترا} = \frac{80}{160} \times 360^\circ = 180^\circ$$

$$\text{الزاوية المركزية لفرنسا} = \frac{6}{160} \times 360^\circ = 13.50^\circ$$

$$\text{الزاوية المركزية لليونان} = \frac{12}{160} \times 360^\circ = 27^\circ$$

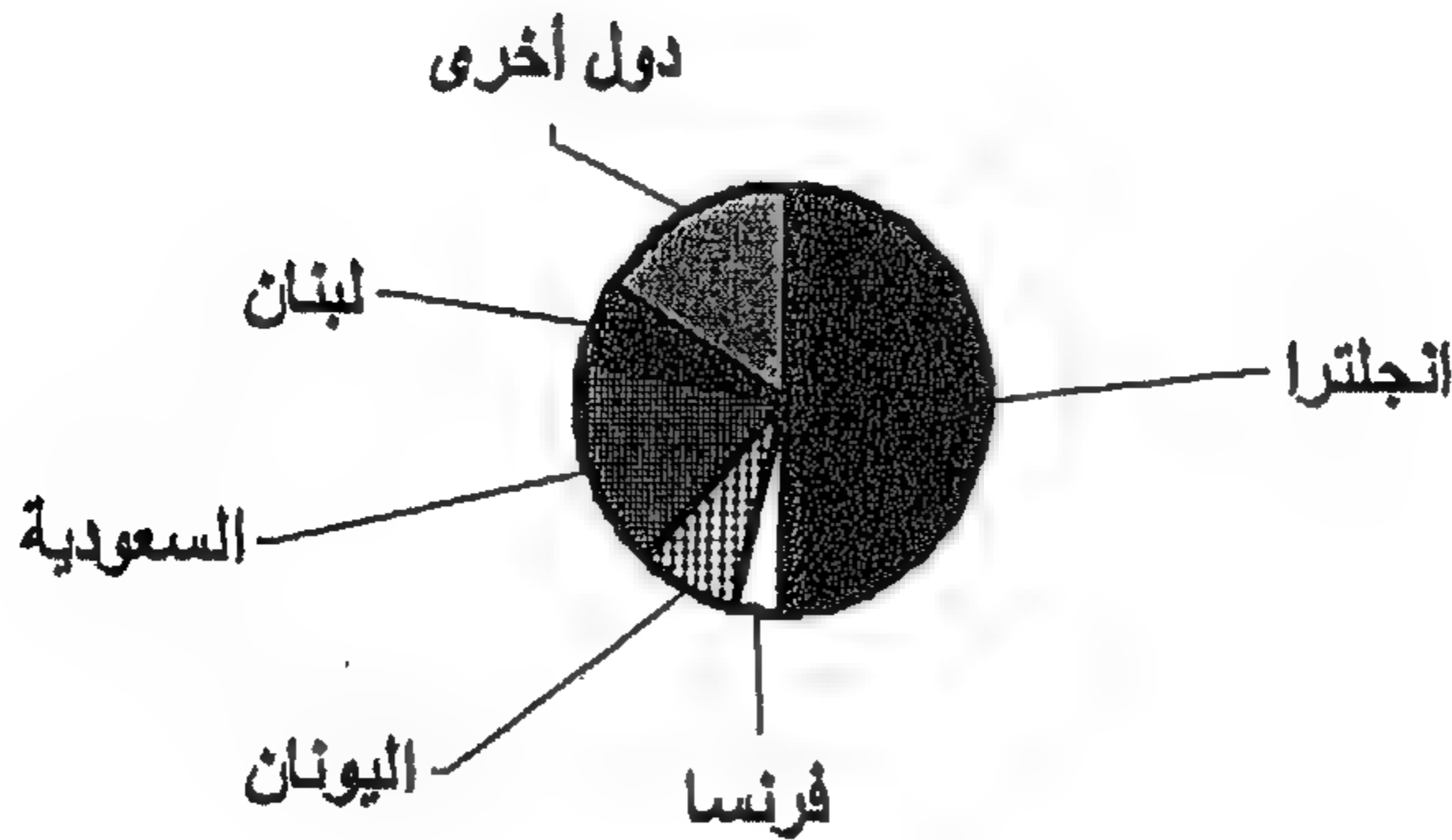
$$\text{الزاوية المركزية للسعودية} = \frac{27}{160} \times 360^\circ = 60.72^\circ$$

$$\text{الزاوية المركزية للبنان} = \frac{9}{160} \times 360^\circ = 20.25^\circ$$

$$\text{الزاوية المركزية للدول الأخرى} = \frac{9}{160} \times 360^\circ = 58.50^\circ$$

المجموع

شكل (٣) توزيع الصادرات المصرية من البطاطس على أهم الدول المستوردة لها



(2) الرسوم البيانية في حالة البيانات المبوبة :

1- المدرج التكرارى Histogram

وهو عبارة عن مجموعة من المستطيلات المتلاصقة تمثل قاعدتها طول الفئة وارتفاعها تمثل تكرار الفئة.

(أ) المدرج التكرارى من جدول التوزيع التكرارى المنتظم :

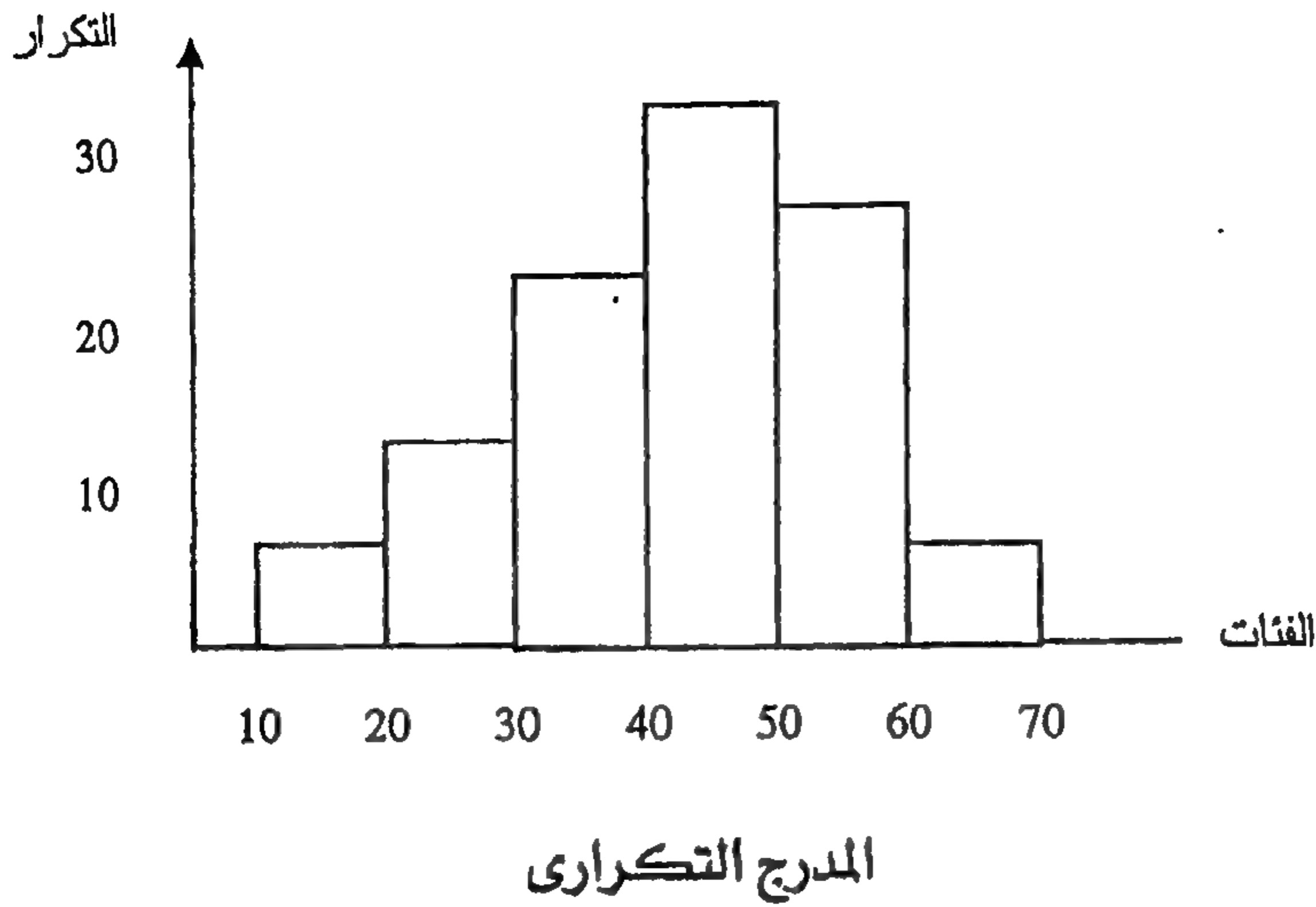
يقصد بالتوزيع التكرارى المنتظم بأنه أطوال فئاته متساوية .
ولرسم المدرج التكرارى من التوزيع التكرارى المنتظم يتم اتباع الخطوات التالية :

- رسم محورين متعامدين أحدهما يمثل المحور الأفقى وتوضع عليه الفئات والآخر يمثل المحور الرأسى وتوضع عليه التكرارات .
- نحدد مقياس الرسم المناسب لمحور التكرارات .
- وضع الحدود الدنيا لكل فئة على المحور الأفقى بالإضافة إلى الحد الأعلى لآخر فئة .
- تمثل كل فئة مستطيل يتناسب ارتفاعه مع تكرار الفئة وبحيث تكون جميع المستطيلات متلاصقة .

مثال : ارسم المدرج التكرارى من الجدول التالى :

| الفئات | -10 | -20 | -30 | -40 | -50 | 60-70 | المجموع |
|---------|-----|-----|-----|-----|-----|-------|---------|
| التكرار | 5 | 10 | 20 | 35 | 25 | 5 | 100 |

الحل : باتباع الخطوات السابقة لرسم المدرج التكرارى يمكن الحصول على الرسم التالى :



وبلاحظ على المدرج التكرارى الآتى :

- ارتفاع المستطيلات هو أساس المقارنة طالما أن أطوال الفئات متساوية.
- فى حالة الجداول التكرارية المفتوحة يتبع نفس خطوات الرسم مع إهمال الفئات المفتوحة .

(ب) المدرج التكرارى من جدول التوزيع التكرارى غير المنتظم :

فى هذه الطريقة تكون الفئات غير متساوية ولا تعبر الارتفاعات عن التكرارات، ولذلك يلزم قبل البدء فى الرسم الحصول على التكرارات المعدلة . والتكرار المعدل يساوى التكرار الأصى مقسوماً على طول الفئة .

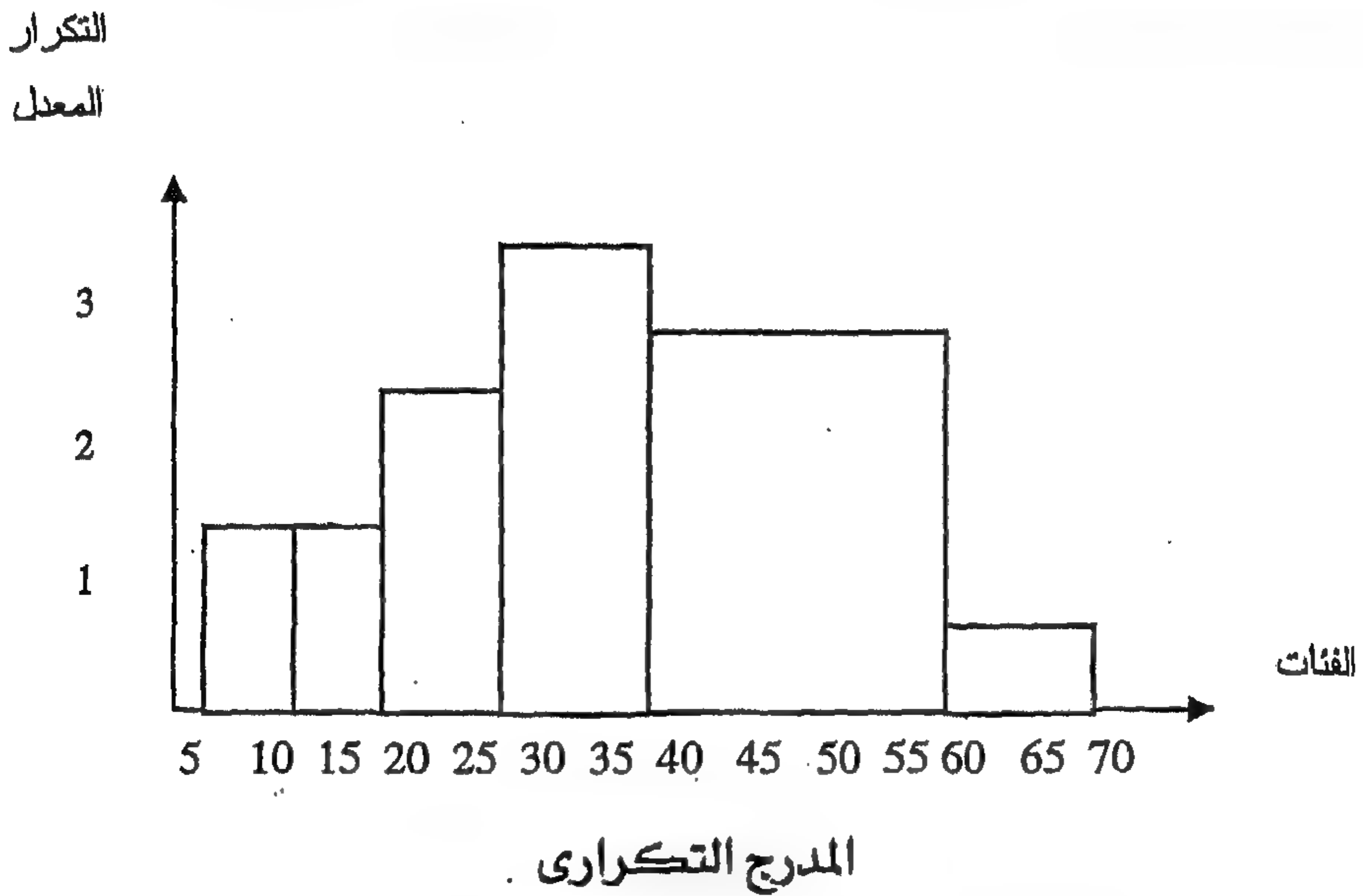
مثال : ارسم المدرج التكرارى من جدول التوزيع التكرارى الآتى :

| الفئات | -5 | -10 | -20 | -30 | -40 | 70-60 | المجموع |
|---------|----|-----|-----|-----|-----|-------|---------|
| التكرار | 5 | 10 | 20 | 35 | 25 | 5 | 100 |

الحل : التكرار المعدل = التكرار الأصلي للفئة ÷ طول الفئة

| الفئات | التكرار الأصلي | طول الفئة | التكرار المعدل |
|---------|----------------|-----------|----------------|
| -5 | 5 | 5 | 1 |
| -10 | 10 | 10 | 1 |
| -20 | 20 | 10 | 2 |
| -30 | 35 | 10 | 3.5 |
| -40 | 25 | 20 | 1.25 |
| 70-60 | 5 | 10 | .5 |
| المجموع | 100 | | |

ثم نقوم برسم المدرج التكراري باتباع نفس الخطوات السابقة .



2- المضلع التكراري:

وهو عبارة عن الخط المنكسر الواصل بين مراكز الفئات . أو الخط الواصل بين منتصف القيم العليا للمدرج التكراري . ويمكن رسمه من خلال :

(ب) استخدام مراكز الفئات

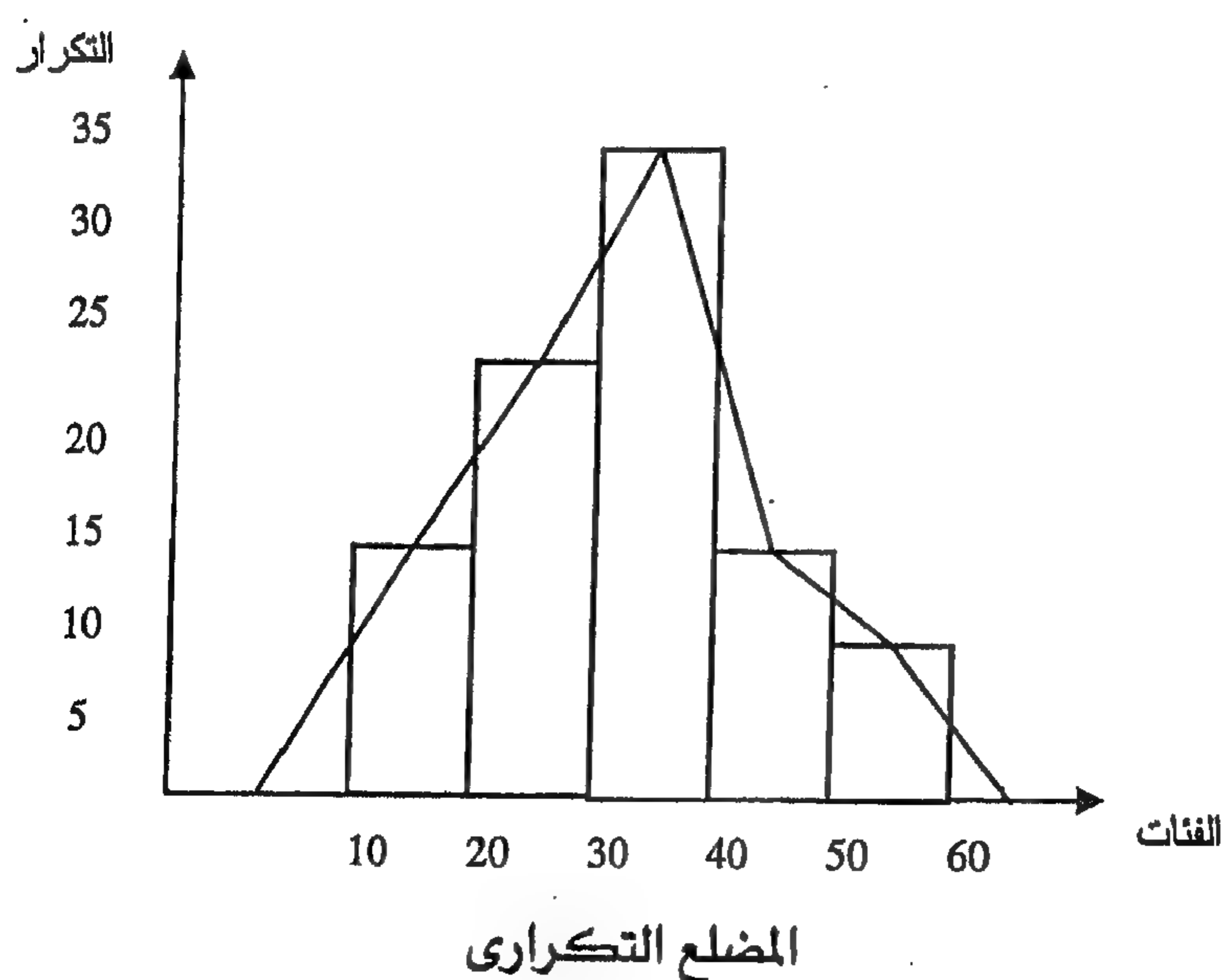
(أ) المدرج التكراري

خطوات رسم المضلع التكرارى من المدرج التكرارى :

- 1- يتم رسم المدرج التكرارى كما سبق .
- 2- نفترض وجود فئة سابقة لأول فئة بالجدول التكرارى تكرارها صفر وأيضاً وجود لاحقة لآخر فئة بالجدول التكرارى بتكرار صفر أيضاً .
- 3- ننصف القيم العليا لكل مستطيل من مستطيلات المدرج التكرارى .
- 4- نصل نقاط التصنيف ببعضها فتحصل على المضلع التكرارى .

مثال: ارسم المضلع التكرارى من بيانات جدول التوزيع التكرارى التالى:

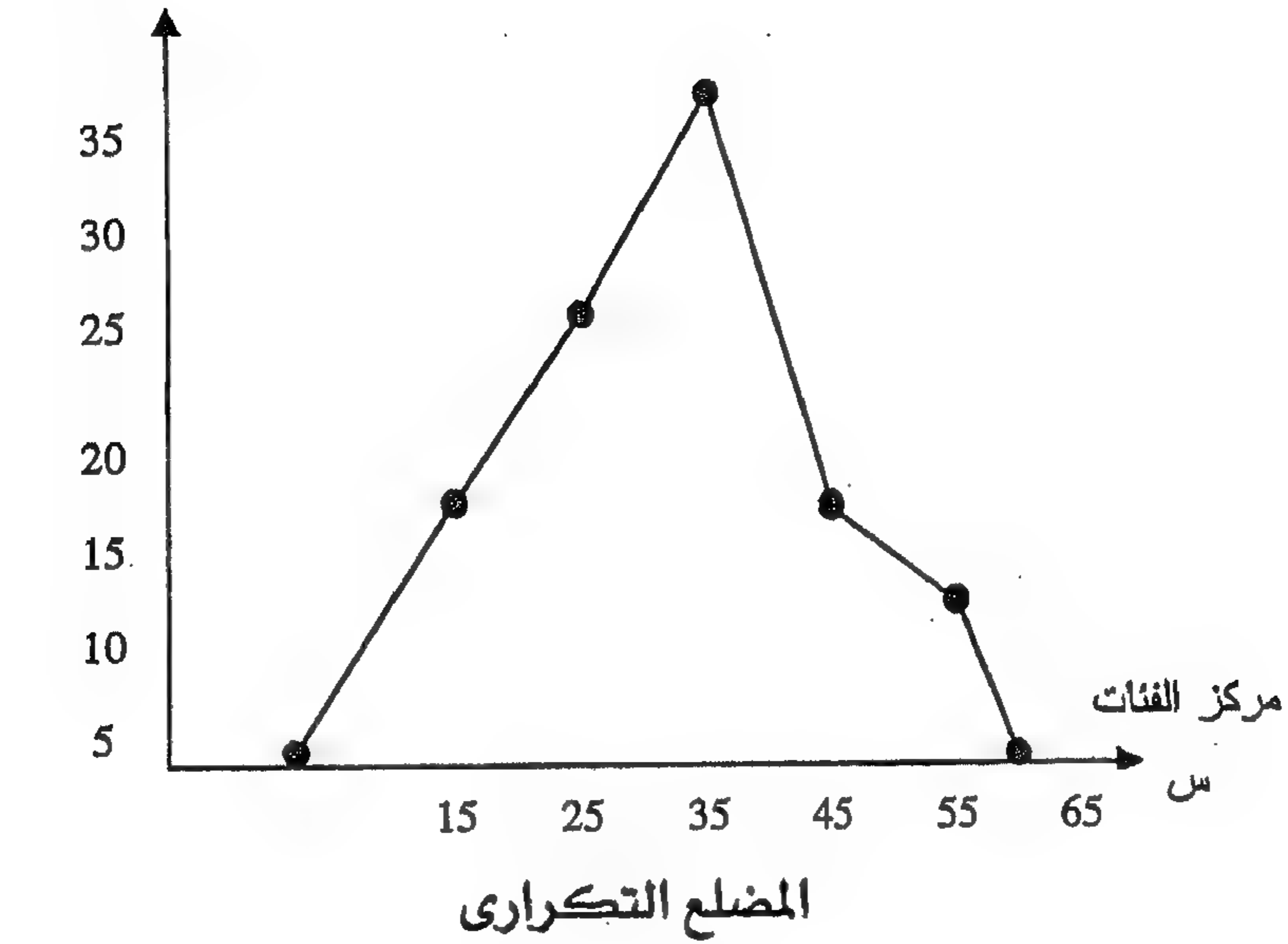
| الفئات | -10 | -20 | -30 | -40 | 60-50 | المجموع |
|---------|-----|-----|-----|-----|-------|---------|
| التكرار | 15 | 25 | 35 | 15 | 10 | 100 |



خطوات رسم المضلع التكرارى باستخدام مراكز الفئات :

يمثل المضلع التكرارى فى هذه الحالة العلاقة بين مراكز الفئات والتكرارات ويتم رسمه كما سبق مع افتراض وجود فئتين سابقة ولاحقة بالجدول التكرارى بتكرار مساوياً للصفر .

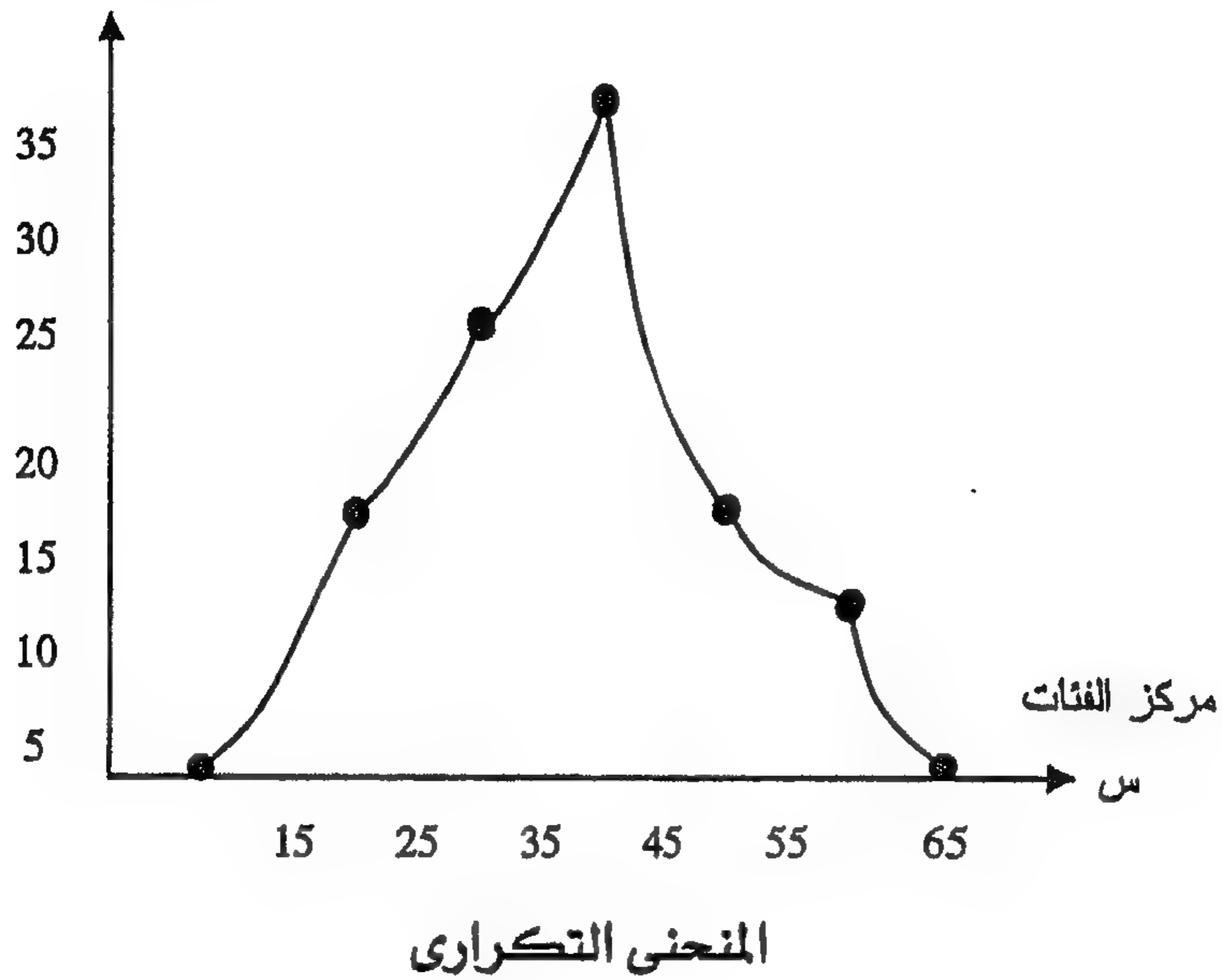
مثال : من بين بيانات المثال السابق ارسم المضلع التكرارى



3- المنحنى التكرارى:

هو الخط المنحنى الواصل بين منتصف القمم العليا للمستطيلات التى يتكون منها المدرج التكرارى . ويمكن الحصول على المنحنى التكرارى أيضاً من خلال العلاقة بين مراكز الفئات والتكرار كما فى حالة رسم المضلع التكرارى .

مثال : ارسم المنحنى التكرارى من الجدول التكرارى للمثال ١ التكرار



4- المنحنى التكرارى المتجمع الهابط:

للحصول على المنحنى التكرارى المتجمع الهابط يلزمنا تكوين جدول تكرارى متجمع هابط ثم نرسم العلاقة بين الفئات والتكرارات المتجمع الهابطة فنحصل على المنحنى التكرارى المتجمع الهابط .

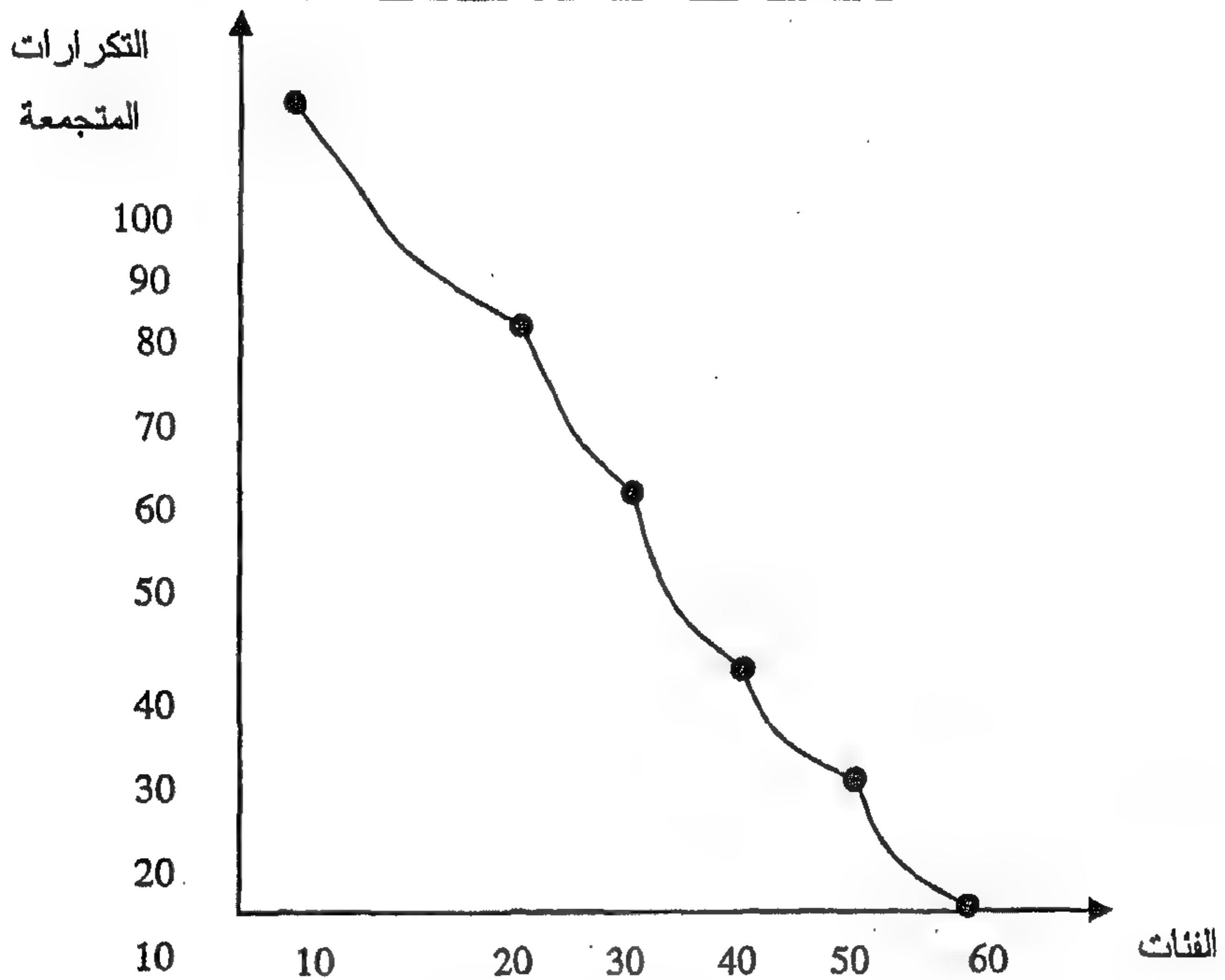
مثال : ارسم المنحنى التكرارى المتجمع الهابط من بيانات الجدول التكرارى السابق .

خطوات الحل :

- تكوين جدول متجمع هابط
- المحور الأفقى يمثل الفئات بمقياس رسم مناسب

- المحور الرأسى يمثل التكرارات المتجمعة الهابطة بمقياس رسم مناسب

| الفئات | تكرارات متجمعة |
|----------|----------------|
| 10 فاكثر | 100 |
| 20 فاكثر | 85 |
| 30 فاكثر | 60 |
| 40 فاكثر | 25 |
| 50 فاكثر | 10 |
| 60 فاكثر | 0 |



المنحنى التكرارى المتجمع الهابط

5- المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد:

للحصول على المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد يلزمنا تكوين جدول تكرارى متجمع صاعد ثم نرسم بعد ذلك العلاقة بين الفئات

والتكرارات المتجمعة الصاعدة فتحصل على المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد .

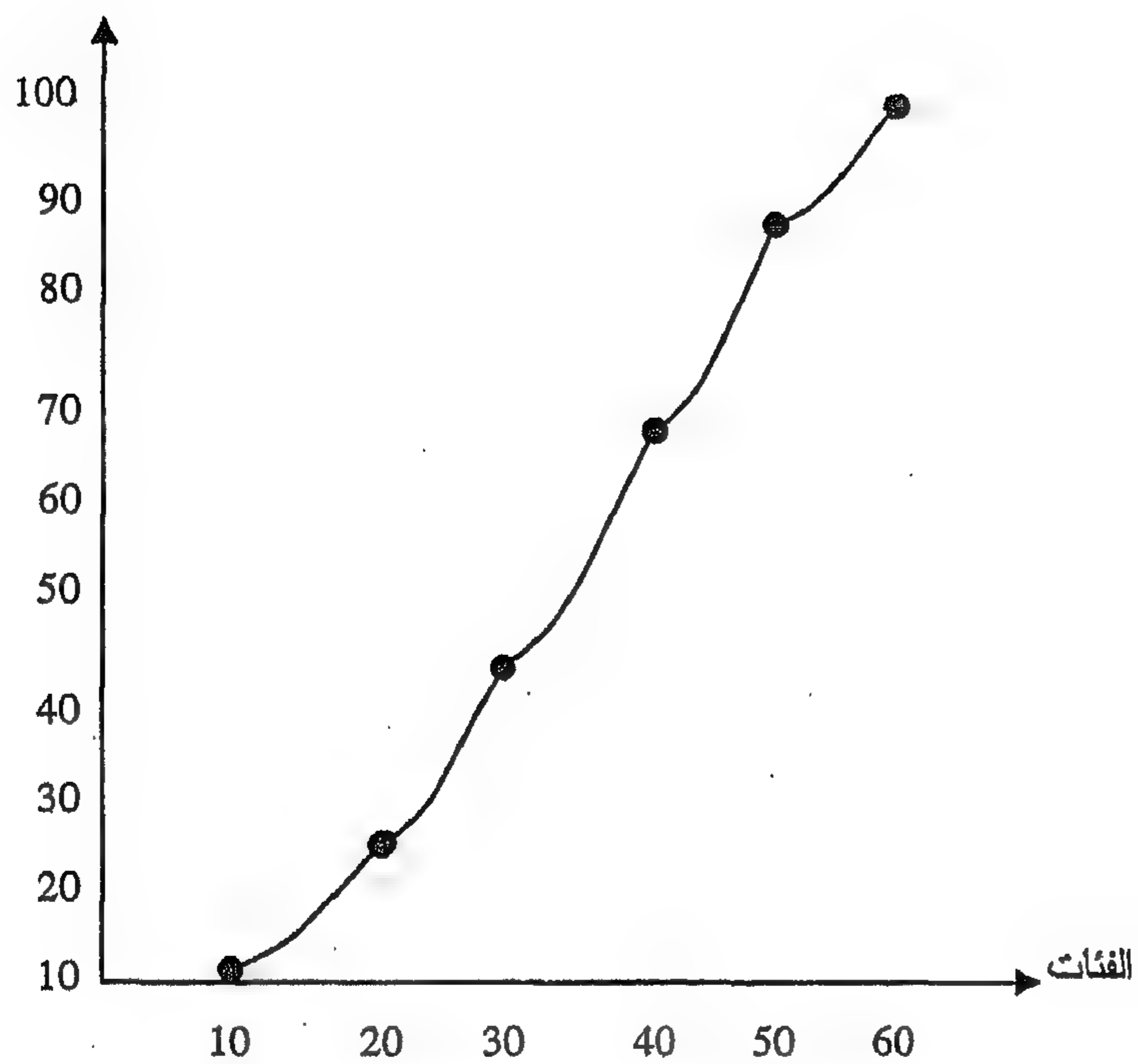
مثال : ارسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد من بيانات الجدول التكرارى السابق .

خطوات الحل :

- تكوين جدول متجمع صاعد
- المحور الأفقى يمثل الفئات بمقياس رسم مناسب
- المحور الرأسى يمثل التكرارات المتجمع الصاعدة بمقياس رسم مناسب

| الفئات | تكرارات متجمعة |
|-----------|----------------|
| أقل من 10 | 0 |
| أقل من 20 | 15 |
| أقل من 30 | 40 |
| أقل من 40 | 75 |
| أقل من 50 | 90 |
| أقل من 60 | 100 |

التكرارات
المتجمعة



المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد

تمارين

(1) كون جدول تكرارى من البيانات التالية:

| | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 30 | 34 | 38 | 33 | 33 | 37 | 43 | 50 | 39 | 34 |
| 36 | 23 | 26 | 35 | 29 | 26 | 20 | 27 | 27 | 28 |
| 46 | 45 | 35 | 31 | 30 | 36 | 28 | 32 | 39 | 35 |
| 38 | 39 | 45 | 30 | 52 | 39 | 40 | 37 | 54 | 46 |
| 49 | 32 | 39 | 36 | 58 | 38 | 31 | 35 | 30 | 30 |
| 25 | 25 | 28 | 31 | 29 | 29 | 45 | 53 | 31 | 32 |
| 37 | 38 | 26 | 38 | 43 | 39 | 37 | 26 | 29 | 26 |
| 43 | 44 | 34 | 40 | 41 | 35 | 41 | 43 | 42 | 46 |
| 44 | 40 | 53 | 36 | 36 | 48 | 49 | 47 | 47 | 37 |
| 41 | 43 | 44 | 41 | 43 | 35 | 41 | 40 | 38 | 42 |

(2) من الجدول التكرارى التالى ارسم المنحنى التكرارى المتجمع

الصاعد والهابط.

| الفئات | -10 | -20 | -30 | -40 | -50 | -60 | 80-70 | المجموع |
|---------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-------|---------|
| التكرار | 8 | 12 | 18 | 25 | 17 | 15 | 5 | 100 |

(3) من بيانات الجدول التكرارى السابق ارسم كل من :

- المدرج التكرارى

- المضلع التكرارى

- المنحنى التكرارى

(4) الجدول التالى يبين الإنتاج الكلى من القطن المصرى وكمية

الصادرات منه خلال الفترة 1985-1992 والمطلوب تصوير هذه

البيانات عن طريق :

ب- الأعمدة البيانية .

أ - الخط البيانى .

| السنوات | الإنتاج الكلى من القطن بالآلف قنطار | كمية الصادرات بالآلف قنطار |
|---------|--|-------------------------------|
| 1985 | 7345 | 2876 |
| 1986 | 6902 | 2952 |
| 1987 | 5421 | 2757 |
| 1988 | 5055 | 2068 |
| 1989 | 4947 | 1450 |
| 1990 | 5190 | 859 |
| 1991 | 5594 | 360 |
| 1992 | 5955 | 332 |

(5) إذا علمت أن مبيعات معارض إحدى شركات الغزل والنسيج من الأقمشة والملابس الجاهزة فى عامى 1995 ، 2000 كالتى :

| المبيعات | عام 1995 مليون دينار | عام 2000 مليون دينار |
|----------------------|-------------------------|-------------------------|
| مبيعات محلية | 60 | 120 |
| صادرات للدول العربية | 180 | 480 |
| صادرات للعالم | 260 | 600 |
| جملة المبيعات | 500 | 1200 |

والمطلوب تمثيل بيانات كل سنة بطريقة الدائرة .

(6) الجدول التكرارى التالى يمثل أجور العمال الأسبوعية للعاملين فى إحدى شركات الاستثمار

| فئات الأجور | -50 | -60 | -70 | -80 | -90 | 100-110 | 110-120 |
|--------------|-----|-----|-----|-----|-----|---------|---------|
| عدد العاملين | 8 | 10 | 16 | 14 | 10 | 5 | 2 |

المطلوب:

1- رسم منحني التكرار المتجمع الصاعد واستخرج منه :

أ - نسبة العاملين الذين يحصلون على أجر أقل من 85 دينار في الأسبوع

ب- عدد العاملين الذين تتراوح أجورهم الأسبوعية بين 80 ، 110 دينار

2- رسم المدرج التكراري.

3- رسم المضلع التكراري.

4- رسم المنحني التكراري.

(7) يوضح الجدول التكراري التالي بيانات 300 موظفاً موزعة على

حسب السن

| السن | أقل من 20 | 20- | 24- | 30- | 35- | 40- | 50-60 | المجموع |
|--------------|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|-------|---------|
| عدد الموظفين | 15 | 35 | 50 | 80 | 70 | 30 | 20 | 300 |

المطلوب

1- رسم المدرج التكراري .

2- رسم المنحني التكراري المتجمع الصاعد والهابط .

3- أوجد عدد الموظفين الذين يتراوح سنهم من 20 لأقل من 40 سنة .

4- أوجد عدد الموظفين الذين يتراوح سنهم أكبر من 40 سنة .

(8) أوجد جدول التكرار النسبي لبيانات التمارين رقم (2) ، (6) ، (7) ،

السابقة .

الفصل الثالث

مقاييس النزعة المركزية

Measures of Central Tendency

تمهيد :

بعد أن يقوم الباحث بجمع البيانات عن الظاهرة موضوع الدراسة يقوم بتلخيصها وتبويبها في صورة توزيعات تكرارية مختلفة ثم تمثيلها بيانياً بأحد الطرق السابق ذكرها ، وفي هذه الحالة يكون الباحث قد كوّن فكرة عن الظاهرة المراد دراستها ، ولكن ذلك لا يكفي لمقارنتها بالظواهر المثيلة المتشابهة ، ويلزم ذلك تلخيص البيانات الواردة في الجداول التكرارية في صورة أكثر دقة لكي يمكننا الحكم على دقتها أو اختلافها .

وللقيام بذلك يكون من المفيد البحث عن قيمة متوسطة تعبر عن هذا التوزيع يطلق عليها المتوسط ، وهي القيمة التي تتجمع حولها قيم الظاهرة ، ويمثل مركز أى مجموعة من القيم تلك القيمة التي تميل مجموعة القيم إلى التجمع حولها والمقياس الذى يقيس هذا المركز يسمى بمقياس النزعة المركزية ، وهناك عدة مقاييس للنزعة المركزية سوف نركز منها على المقاييس التالية :

1- الوسط الحسابى Arithmetic Mean

2- الوسيط Median

3- المنوال Mode

4- الوسط الهندسى Geometric Mean

5- المتوسط الموزون Weighted Mean

وهناك عدد من الشروط يجب توافرها فى مقاييس النزعة المركزية يذكر منها :

- (1) ألا يتأثر بالقيم الشاذة أو المتفرقة .
- (2) يسهل حسابه ومعالجته جبرياً .
- (3) أن يأخذ فى الاعتبار كل المفردات التى تتكون منها الظاهرة موضع الدراسة .
- (4) أن يكون للمقياس معنى وخواص مميزه .
- (5) يمكن حسابه بسرعة وسهولة .

وسوف يتم تناول هذه المقاييس سابقة الذكر سواء على مستوى القيم المطلقة أو على البيانات المبوبة فى شكل جدول توزيع تكرارى .

أولاً : الوسط الحسابى :

وهو يعتبر من أكثر مقاييس النزعة المركزية شيوعاً واستخداماً ، ويمكن حساب الوسط الحسابى من بيانات القيم المطلقة أو من البيانات المبوبة فى شكل جداول تكرارية .

(أ) الوسط الحسابى باستخدام القيم المطلقة :

1- الطريقة المباشرة :

إذا كان لدينا مجموعة من القيم س₁ ، س₂ ، ... س_n حيث ن عدد القيم فإن الوسط الحسابى لهذه القيم يمكن حسابه من الصيغة الرياضية التالية :

$$\overline{س} = \frac{س_1 + س_2 + \dots + س_n}{ن} = \frac{مجموع س}{ن}$$

خطوات الحساب :

1- نجمع قيم المفردات ونرمز لها بالرمز مجموع س

2- نحصر عدد هذه القيم ونرمز لها بالرمز ن

3- نقدر الوسط الحسابي ونرمز له بالرمز $\overline{س}$

مثال : أوجد الوسط الحسابي للقيم التالية : 1، 2، 3، 4، 5

الحل :

$$مجموع س = 15 ، \quad ن = 5$$

$$\overline{س} = \frac{مجموع س}{ن} = \frac{15}{5}$$

ملحوظة :

$$\overline{س} = \frac{مجموع س}{ن} \quad \text{من العلاقة الرياضية للوسط الحسابي س}$$

يمكن استنباط العلاقة التالية :

$$(1) \quad مجموع س = ن \times \overline{س}$$

أى فى حالة معلومية الوسط الحسابي لمجموعة من البيانات ومعرفة عددها فإنه يمكن الحصول على مجموع هذه البيانات

مثال : إذا علمت أن الوسط الحسابي لمجموعة من القيم عددها 8

هو 24 فأوجد مجموع هذه القيم

الحل : س = 24 ، ن = 8

$$\therefore \text{مجس} = 8 \times 24 = 192$$

$$(2) \text{ ن} = \frac{\text{مجس}}{\text{س}}$$

أى بمعلومية الوسط الحسابى لمجموعة من القيم ومجموع هذه القيم يمكن معرفة عدد هذه القيم .

مثال : أوجد عدد كتب الإحصاء التى تم بيعها للطلبة إذا علمت أن إجمالى ثمنها 500 دينار وثمان النسخة الواحدة 10 دينار .

الحل : مجس = 500 ، س = 10

$$\therefore \text{ن} = \frac{\text{مجس}}{\text{س}} = \frac{500}{10} = 50 \text{ كتاب}$$

2- طريقة الانحرافات :

وتستخدم هذه الطريقة فى حالة إذا كانت قيم مفردات الظاهرة موضع الدراسة كبيرة . وتتلخص خطوات حساب هذه الطريقة فى الآتى :

1- يتم اختيار وسط فرضى لمجموعة القيم المراد حساب الوسط الحسابى لها ويرمز له بالرمز (و) .

2- يتم طرح (و) من كل القيم فتحصل على الانحرافات والتى يرمز لها بالرمز (ح) .

حيث : ح = س - و

$$3- \text{ يطبق القانون } \bar{S} = \frac{\text{مجم ح}}{ن} + و$$

مثال أوجد الوسط الحسابى بطريقة الانحرافات للقيم التالية

$$10, 17, 16, 15, 18, 14$$

الحل (أ) نختار الوسط الفرضى وليكن $و = 10$

(ب) نحسب ح وهى $س - و$

$$\therefore ح = 4, 8, 5, 6, 7, 0$$

$$(ج) \bar{S} = 10 + \frac{0 + 7 + 6 + 5 + 8 + 4}{6}$$

$$15 = 10 + \frac{30}{6} =$$

مثال : أوجد الوسط الحسابى لقيم المثال السابق بالطريقة

المباشرة

$$\text{الحل : } \bar{S} = \frac{\text{مجم س}}{ن}$$

$$= \frac{10 + 17 + 16 + 15 + 18 + 14}{6}$$

$$= \frac{90}{6} = 15 \text{ وهى نفس النتيجة السابقة}$$

3- طريقة الانحرافات المختصرة:

وتختلف هذه الطريقة عن الطريقة السابقة فى إنه إذا كانت

الانحرافات (ح) التى حصلنا عليها يمكن قسيمتها على رقم معين

لتبسيط الأرقام فإنه يمكن الحصول على الانحرافات المختصرة ويرمز لها بالرمز ح وفق العلاقة الرياضية التالية .

$$\bar{س} = \left(\frac{\text{مجم ح}}{ن} \times \text{العامل المشترك} \right) + و$$

خطوات الحل :

1- يتم اختيار وسط فرضي من قيم الظاهرة موضوع الدراسة ويرمز له بالرمز و

2- نحسب الانحرافات (ح) حيث $ح = س - و$ و

3- يتم حساب $\bar{ح}$ حيث $\bar{ح} = ح \div \text{العامل المشترك}$

4- يتم حساب س من العلاقة الرياضية السابقة

مثال : أحسب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة

من القيم التالية :

110 ، 120 ، 130 ، 140 ، 150 ، 160

الحل : نفرض أن الوسط الفرضي هو 110 ونقوم بحساب (ح)،

(ح) كما في الجدول التالي :

| القيم (س) | الانحرافات $ح = س - و$ | الانحرافات المختصرة $\frac{ح}{10} = \bar{ح}$ |
|--------------|---------------------------|---|
| 110 | 0 | 0 |
| 120 | 10 | 1 |
| 130 | 20 | 2 |
| 140 | 30 | 3 |
| 150 | 40 | 4 |
| 160 | 80 | 5 |
| المجموع | 150 | 15 |

$$\bar{س} = \left(\frac{\text{مجموع}}{ن} \times م \right) + و$$

$$110 + \left(10 \times \frac{15}{6} \right) =$$

$$135 =$$

مثال : من بيانات المثال السابق أوجد الوسط الحسابي

(1) بالطريقة المباشرة (2) بطريقة الانحرافات

الحل : (1) الطريقة المباشرة

$$\bar{س} = \frac{\text{مجموع س}}{ن}$$

$$135 = \frac{810}{6} =$$

(2) طريقة الانحرافات

$$\bar{س} = \frac{\text{مجموع ح}}{ن}$$

$$110 + \frac{150}{6} = \bar{س}$$

$$135 =$$

(ب) الوسط الحسابي من البيانات المبوية المنتظمة :

1- الوسط الحسابي للجداول التكرارية ذات الدرجات : توجد

مجموعة من البيانات على هيئة قيم للمفردات س1، س2، ... س_ن

ولكل قيمة تكرار معينة ك مقابل لكل قيمة س على الصورة
ك1، ك2، ... كن ويتم حساب الوسط الحسابي من العلاقة
الرياضية .

$$\frac{\text{مجموع حاصل ضرب الدرجة} \times \text{تكرارها}}{\text{مجموع التكرارات}} = \text{الوسط الحسابي}$$

$$\frac{\text{مجموع س} \times \text{ك}}{\text{مجموع ك}} = \frac{\text{س}}{\text{ك}}$$

خطوات الحساب :

1- بالإضافة إلى عمودى المسألة س، ك نكوّن عمود ثالث يشمل
حاصل ضرب س × ك .

2- نوجد مجموع التكرارات وكذلك مجموع س × ك .

3- نطبق القانون السابق لإيجاد الوسط الحسابي .

مثال : أوجد الوسط الحسابي من الجدول التالى

| درجات الطلاب (س) | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | المجموع |
|------------------|----|----|----|----|----|---|---------|
| عدد الطلبة (ك) | 10 | 15 | 35 | 20 | 15 | 5 | 100 |

الحل :

| س | ك | س × ك |
|---------|-----|-------|
| 3 | 10 | 30 |
| 4 | 15 | 60 |
| 5 | 35 | 175 |
| 6 | 20 | 120 |
| 7 | 15 | 105 |
| 8 | 5 | 40 |
| المجموع | 100 | 530 |

$$\square \quad \bar{S} = \frac{\text{مجموع } S \times K}{\text{مجموع } K} = \frac{530}{100} = 5.3 \text{ درجة}$$

2- الوسط الحسابى للبيانات المبوبة المنتظمة :

لإيجاد الوسط الحسابى للبيانات المبوبة المنتظمة أى التى فى صورة جدول توزيع تكرارى منتظم يوجد ثلاث طرق لإيجاده :

(أ) الطريقة المباشرة :

وفيهما يستخدم القانون التالى لحساب الوسط الحسابى وهو نفس القانون المستخدم فى حالة الجداول التكرارية ذات الدرجات حيث :

$$\bar{S} = \frac{\text{مجموع } S \times K}{\text{مجموع } K}$$

حيث س تمثل مركز الفئة ، ك تمثل التكرار

$$\square \quad \text{مركز الفئة} = \frac{\text{الحد الأدنى للفئة} + \text{الحد الأعلى للفئة}}{2}$$

$$\text{أو} = \frac{\text{بداية الفئة} + \text{بداية الفئة التالية}}{2}$$

خطوات الحساب :

- 1- نوجد عمود مراكز الفئات س .
- 2- نوجد عمود حاصل ضرب س × ك .
- 3- نوجد مجموع التكرارات (مجموع ك) ومجموع س × ك .
- 4- نطبق القانون السابق لإيجاد \bar{S}

مثال : أوجد الوسط الحسابي من بيانات جدول التوزيع التكراري التالي بالطريقة المباشرة .

| الفئات | -10 | -20 | -30 | -40 | -50 | 70-60 |
|---------|-----|-----|-----|-----|-----|-------|
| التكرار | 3 | 14 | 16 | 11 | 4 | 2 |

الحل :

1- نكون جدول الحل وهو يشمل 4 أعمدة هما عمودى المسألة (عمود الفئات وعمود التكرارات) بالإضافة إلى عمود مركز الفئات S وعمود حاصل ضرب $S \times K$.

2- نوجد مركز الفئات وتوضع في عمود S .

3- نوجد حاصل ضرب $S \times K$.

4- نوجد مجس ، مجس $\times K$.

5- نطبق القانون لإيجاد \bar{S} حيث $S = \frac{\text{مجس} \times K}{\text{مجك}}$

| الفئات | التكرار (ك) | مركز الفئة (س) | س \times ك |
|---------|----------------|-------------------|--------------|
| -10 | 3 | 15 | 45 |
| -20 | 14 | 25 | 350 |
| -30 | 16 | 35 | 560 |
| -40 | 11 | 45 | 495 |
| -50 | 4 | 55 | 220 |
| 70-60 | 2 | 65 | 130 |
| المجموع | 50 | | 1800 |

$$u = \frac{\text{مجموع } x \times k}{\text{مجموع } k}$$

$$36 = \frac{1800}{50}$$

(ب) طريقة الانحرافات :

تستخدم هذه الطريقة لتبسيط الحسابات . وتعتمد هذه الطريقة على اختيار وسط فرضي وهو عبارة عن مركز الفئة المقابل لأكبر تكرار .

خطوات الحساب :

- 1- نكون جدول الحل وهو يشمل 5 أعمدة هما عمودى المسألة (عمود الفئات وعمود التكرار) وعمود مركز الفئة س وعمود ح (انحراف مراكز الفئات عن الوسط الفرضي) وأخيراً عمود حاصل ضرب ح \times ك .
- 2- نختار الوسط الفرضي (و) من بين مراكز الفئات وهو عادة يكون مركز الفئة الموجود أمام أكبر تكرار .
- 3- نحسب انحراف مركز كل فئة عن الوسط الفرضي أى نحسب $ح = س - و$
- 4- نحسب حاصل ضرب ح \times ك
- 5- نوجد المجموع لعمود التكرار وعمود حاصل ضرب ح \times ك
- 6- نطبق القانون

$$\bar{س} = \frac{\text{مجموع } س \times ك}{\text{مجموع } ك} + و$$

مثال : احسب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات لجدول التوزيع التكراري من المثال السابق .

الحل :

| الفئات | التكرار (ك) | س | ح | ح × ك |
|---------|-------------|-----------|-----|-------|
| -10 | 3 | 15 | 20- | 60- |
| -20 | 14 | 25 | 10- | 140- |
| -30 | 16 | <u>35</u> | 0 | 0 |
| -40 | 11 | 45 | 10+ | 110+ |
| -50 | 4 | 55 | 20+ | 80+ |
| 70-60 | 2 | 65 | 30+ | 60+ |
| المجموع | 50 | | | 50 |

$$\bar{س} = \frac{\text{مجموع } س \times ك}{\text{مجموع } ك} + و$$

$$36 = 35 + \frac{50}{50} =$$

ملحوظة : تم اختيار الوسط الفرضي و = 35 وهو يشير إلى مركز الفئة الموجود أمام أكبر تكرار .

(ج) طريقة الانحرافات المختصرة :

وهذه الطريقة لا تختلف عن الطريقة السابقة وفيها تجرى الثلاث خطوات الأولى ثم نوجد العمود الخامس الذي يمثل الانحرافات

المختصرة \bar{C} وهو عبارة عن C مقسوماً على طول الفئة L ثم نوجد حاصل ضرب $\bar{C} \times K$.

خطوات الحساب :

1- تجرى الخطوات من 1 - 3 من طريقة الانحرافات .

2- نحسب الانحرافات المختصرة $\bar{C} = \frac{C}{L}$

3- نوجد حاصل الضرب $\bar{C} \times K$.

4- نوجد مجاميع عمود K ، عمود $\bar{C} \times K$.

5- نحسب الوسط الحسابي من العلاقة

$$\bar{S} = W + \frac{\text{مجم } \bar{C} \times K}{\text{مجم } K}$$

مثال : احسب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة من

بيانات جدول التوزيع التكراري الأسبق

الحل :

| ف | ك | س | $C = S - W$ | $\bar{C} = \frac{C}{L}$ | $\bar{C} \times K$ |
|---------|----|-----------|-------------|-------------------------|--------------------|
| -10 | 3 | 15 | 20- | 2- | 6- |
| -20 | 14 | 25 | 10- | 1- | 14- |
| -30 | 16 | <u>35</u> | 0 | 0 | 0 |
| -40 | 11 | 45 | 10+ | 1+ | 11 |
| -50 | 4 | 55 | 20+ | 2+ | 8 |
| 70-60 | 2 | 65 | 30+ | 3+ | 6 |
| المجموع | 50 | | | | 5 |

$$\bar{س} = و + \frac{\text{مجم ح} \times ك}{\text{مجم ك}} \times ل$$

$$36 = 10 \times \frac{5}{50} + 35 =$$

ملحوظة : لاحظ أن حساب الوسط الحسابي بأى طريقة من الطرق الثلاث السابقة يعطى نفس النتيجة .

(ج) الوسط الحسابي من البيانات المبوبة غير المنتظمة :

من خلال هذه الطريقة يمكن إيجاد الوسط الحسابي بالطرق الثلاث السابقة والخاصة بالجداول التكرارية المنتظمة ولكن عند استخدام طريقة الانحرافات المختصرة يجرى إيجاد ح بقسمة ح على عامل مشترك بدلاً من (ل) وإذا تعذر الحصول على عامل مشترك فيكتفى بطريقة الانحرافات .

مثال : احسب الوسط الحسابي من جدول التوزيع التكرارى

الآتى :

| الفئات | -10 | -20 | -30 | -50 | -80 | 150-120 | المجموع |
|---------|-----|-----|-----|-----|-----|---------|---------|
| التكرار | 5 | 8 | 23 | 34 | 20 | 10 | 100 |

الحل :

أولاً : الطريقة العادية (المباشرة) :

| ف | ك | س | س × ك |
|---------|-----|-----|-------|
| -10 | 5 | 15 | 75 |
| -20 | 8 | 25 | 200 |
| -30 | 23 | 40 | 920 |
| -50 | 34 | 65 | 2210 |
| -80 | 20 | 100 | 2000 |
| 150-120 | 10 | 135 | 1350 |
| المجموع | 100 | | 6755 |

$$\bar{S} = \frac{\text{مجموع } S \times K}{\text{مجموع } K}$$

$$67.55 = \frac{6755}{100}$$

ثانياً: طريقة الانحرافات :

| ف | ك | س | ح | ح × ك |
|---------|-----|-----------|-----|-------|
| -10 | 5 | 15 | 50- | 250- |
| -20 | 8 | 25 | 40- | 320- |
| -30 | 23 | 40 | 25- | 575- |
| -50 | 34 | <u>65</u> | 0 | 0 |
| -80 | 20 | 100 | 35+ | 700 |
| 150-120 | 10 | 135 | 70+ | 700 |
| المجموع | 100 | | | 255 |

$$\bar{S} = \frac{\text{مجموع } S \times K}{\text{مجموع } K} + \bar{C}$$

$$67.55 = 65 + \frac{255}{100}$$

ثالثاً : طريقة الانحرافات المختصرة :

| ف | ك | س | ح | $\bar{C} = \frac{C}{5}$ | $\bar{C} \times K$ |
|---------|-----|-----------|-----|-------------------------|--------------------|
| -10 | 5 | 15 | 50- | 10- | 50- |
| -20 | 8 | 25 | 40- | 8- | 64- |
| -30 | 23 | 40 | 25- | 5- | 115- |
| -50 | 34 | <u>65</u> | 0 | 0 | 0 |
| -80 | 20 | 100 | 35+ | 7+ | 140 |
| 150-120 | 10 | 135 | 70+ | 14+ | 140 |
| المجموع | 100 | | | | 51 |

$$\bar{s} = \bar{w} + \frac{\text{مجم ح} \times \text{ك}}{\text{مجم ك}} \times \text{العامل المشترك}$$

$$67.55 = 5 \times \frac{51}{100} + 65 =$$

ملحوظة : لاحظ أننا قمنا باختيار عامل مشترك من قيم الانحرافات ح وهو يساوى 5 ولم يتم اختيار ل كما فى حالة الجداول المنتظمة لأن الجدول هنا غير منتظم .

خصائص الوسط الحسابى :

1- مجموع انحرافات القيم عن وسطها الحسابى يساوى صفر أى :

$$\text{مجم (س - } \bar{s} \text{)} = \text{صفر}$$

مثال : إذا كان لدينا القيم 3 ، 5 ، 4 ، 8

$$\bar{s} = \frac{\text{مجم س}}{ن} = \frac{8+4+5+3}{4} = 5$$

$$\text{ويكون مجم (س - } \bar{s} \text{)} = 2- + \text{صفر} - 1 + 3 = \text{صفر}$$

2- مجموع مربع انحرافات القيم عن وسطها الحسابى يكون أقل من مجموع مربع انحرافات القيم عن أى مقدار آخر

مثال : من المثال السابق

$$\text{مجم (س - } \bar{s} \text{)}^2 = 4 + \text{صفر} + 1 + 9 = 14$$

وإذا أخذنا انحراف القيم عن المقدار 3 مثلاً

$$\text{مج (س - 3)} = \text{صفر} + 2 + 1 + 5$$

$$\text{مج (س - 3)}^2 = \text{صفر} + 4 + 1 + 25 = 30$$

$$\therefore \text{مج (س - س)}^2 > \text{مج (س - 3)} \text{ أى مقدار غير س}^2$$

3- الوسط الحسابى يتأثر بالقيم الشاذة لأنه يأخذ فى اعتباره جميع

القيم فمثلاً إذا كان لدينا المجموعتين أ ، ب حيث :

$$\text{أ} = 1, 2, 7, 200$$

$$\text{ب} = 1, 2, 3, 4$$

فيكون الوسط الحسابى للمجموعة أ $\bar{س}_أ =$

$$52.5 = \frac{210}{4} = \frac{200 + 7 + 2 + 1}{4}$$

ويكون الوسط الحسابى للمجموعة ب $\bar{س}_ب =$

$$2.5 = \frac{4 + 3 + 2 + 1}{4}$$

ويلاحظ أن المجموعة أ تأثرت بشكل كبير لوجود القيمة

(200) وهى شاذة عن باقى الأرقام .

4- من الصعب حساب الوسط الحسابى من الجداول المفتوحة لصعوبة

تحديد مراكز الفئات المناظرة لها .

5- لا يمكن إيجاد الوسط الحسابى من الرسم البيانى كما فى حالة الوسيط والمنوال كما سوف يأتى ذكره فيما بعد .

ثانياً : الوسيط Median

يعرف الوسيط بأنه القيمة التى تتوسط مجموعة من القيم بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً .

طرق حساب الوسيط :

(١) من القيم المطلقة :

1- إذا كان عدد القيم المطلقة فردى فإن

ترتيب الوسيط = حيث ن عدد القيم

مثال : احسب الوسيط للقيم الآتية : 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6

الحل : نرتب القيم تنازلياً 6 ، 5 ، 4 ، 3 ، 2

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{1 + 5}{2} = \frac{1 + \text{ن}}{2} = 3$$

وبالتالى يكون الوسيط هو القيمة التى يكون ترتيبها الثالث وهى 4

2- إذا كان عدد القيم المطلقة زوجياً فإنه يوجد قيمتين للوسيط ويأخذ الوسط الحسابى لهما لنحصل على الوسيط المطلوب .

وفى هذه الحالة نحصل على ترتيب الوسيطين كالاتى :

$$\frac{\text{الترتيب الأول}}{2} = \frac{\text{ن}}{2}$$

$$\text{الترتيب الثاني} = 1 + \frac{n}{2}$$

مثال : احسب الوسيط للقيم الآتية : 3 , 6 , 1 , 2 , 8 , 10

الحل : ترتيب القيم تنازلياً 10 , 8 , 6 , 3 , 2 , 1

$$\text{الترتيب الأول} = \frac{n}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\text{الترتيب الثاني} = 1 + \frac{n}{2} = 1 + 3 = 4$$

∴ يوجد قيمتين للوسيط ترتيبهما الثالث والرابع وبالنظر إلى البيانات بعد ترتيبها تنازلياً تكون هاتين القيمتين هما 6 , 3 ويكون الوسيط هو $(3 + 6) / 2 = 4.5$

(ب) حساب الوسيط من البيانات المبوبة :

يمكن حساب الوسيط من الجداول التكرارية سواء كانت منتظمة أو غير منتظمة أو مفتوحة لأنه لا يتأثر بالقيم الشاذة .

خطوات حساب الوسيط من الجداول التكرارية :

(1) يتم حساب ترتيب الوسيط من العلاقة : ترتيب الوسيط = $\frac{N}{2}$ /

(2) نكون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد .

(3) يحدد ترتيب الوسيط على جدول التكرار المتجمع الصاعد .

(4) يتم تحديد الفئة الوسيطة بناء على ترتيب الوسيط وهى الفئة المقابلة لأكبر تكرار فى الجدول التكرارى .

(5) نطبق القانون التالى لإيجاد قيمة الوسيط : حيث

$$\text{الوسيط} = \text{الحد الأدنى للفئة الوسيطة} + \left\{ \frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{ت م ص السابق}}{\text{تكرار الفئة الوسيطة}} \right\} \times \text{طول الفئة الوسيطة}$$

× طول الفئة الوسيطة

ويلاحظ أن تكرار الفئة الوسيطة = ت م ص السابق لترتيب الوسيط - ت م ص اللاحق لترتيب الوسيط .

مثال : أوجد قيمة الوسيط جبرياً وبيانياً من جدول التوزيع

التكرارى الآتى :

| الفئات | -10 | -14 | -18 | -22 | -26 | 30-34 | المجموع |
|---------|-----|-----|-----|-----|-----|-------|---------|
| التكرار | 10 | 15 | 30 | 25 | 12 | 8 | 100 |

الحل :

أولاً : إيجاد الوسيط جبرياً :

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجموع}}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد أو الهابط

| ف | ت م ص | |
|-----------|-------|----------------|
| أقل من 10 | 0 | |
| أقل من 14 | 10 | |
| أقل من 18 | 25 | ت م ص السابق → |
| أقل من 22 | 55 | 20 → |
| أقل من 26 | 80 | ت م ص اللاحق → |
| أقل من 30 | 92 | |
| أقل من 34 | 100 | |

أقل من بداية كل فئة

نحدد ترتيب الوسيط على جدول ت م ص لكي نحدد الفئة الوسيطة

الفئة الوسيطة هي (18 - 22)

الحد الأدنى للفئة الوسيطة 18

طول الفئة الوسيطة 4

ت م ص السابق لترتيب الوسيط = 25

ت م ص اللاحق لترتيب الوسيط = 55

$$\text{الوسيط} = 18 + 4 \times \frac{25 - 50}{25 - 55}$$

$$21.33 = 4 \times \frac{25}{30} + 18 =$$

ثانياً : إيجاد الوسيط بيانياً :

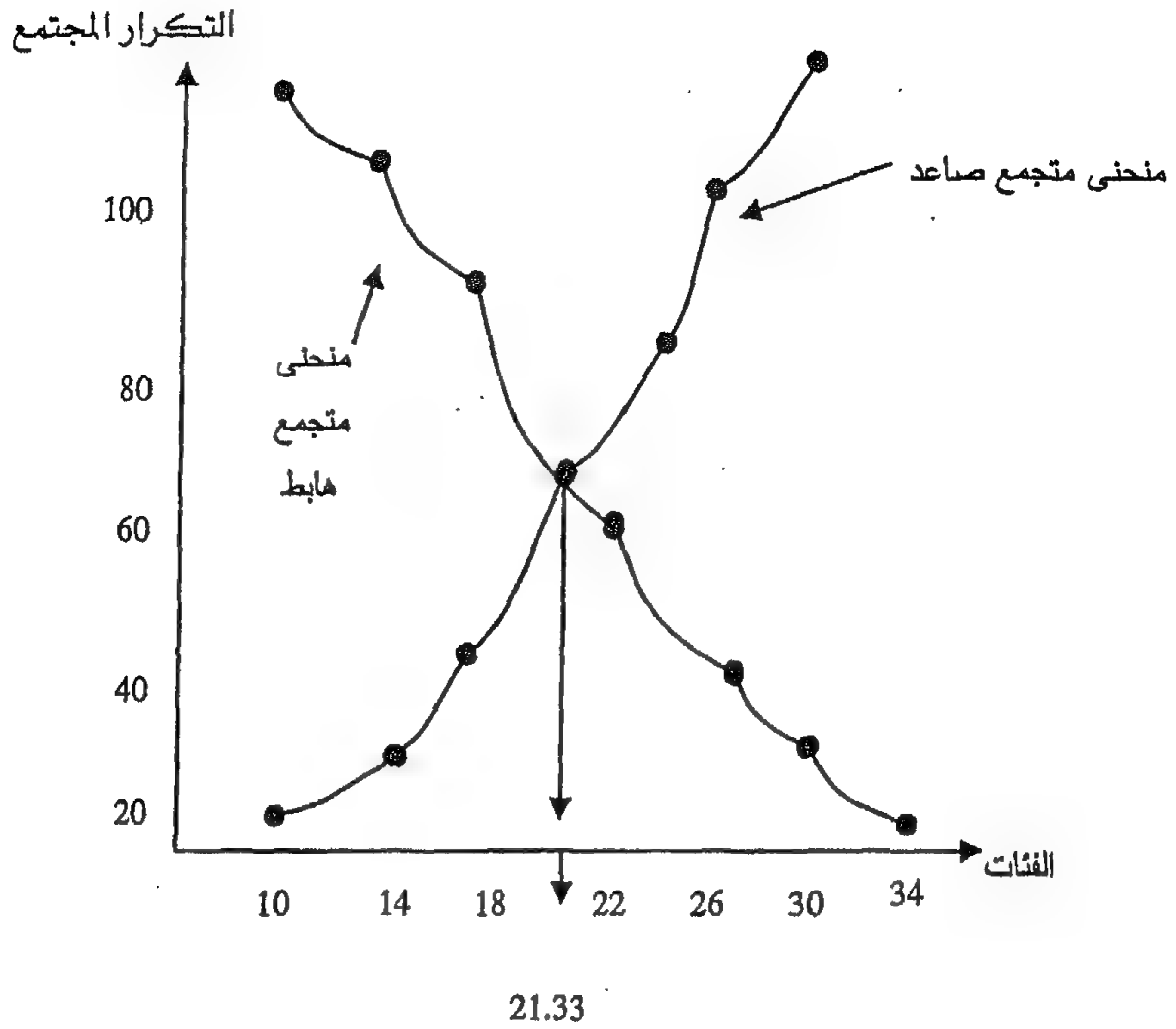
(1) هو نقطة تقاطع المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد مع المنحنى التكرارى المتجمع الهابط . وبالتالي يلزمنا عمل جدول التكرار المتجمع الهابط .

| | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| 34 | 30 | 26 | 22 | 18 | 14 | 10 | ف |
| فأكثر | فأكثر | فأكثر | فأكثر | فأكثر | فأكثر | فأكثر | |
| 0 | 8 | 20 | 45 | 75 | 90 | 100 | ت م هـ |

بداية كل فئة فأكثر

2

وباستخدام المنحنيين المتجمع الصاعد والمتجمع الهابط ومن نقطة تقاطع المنحنيين الصاعد والهابط وبإسقاط عمود على المحور الأفقى تتحدد قيمة الوسيط من الجدولين كما يتضح من الرسم التالى :

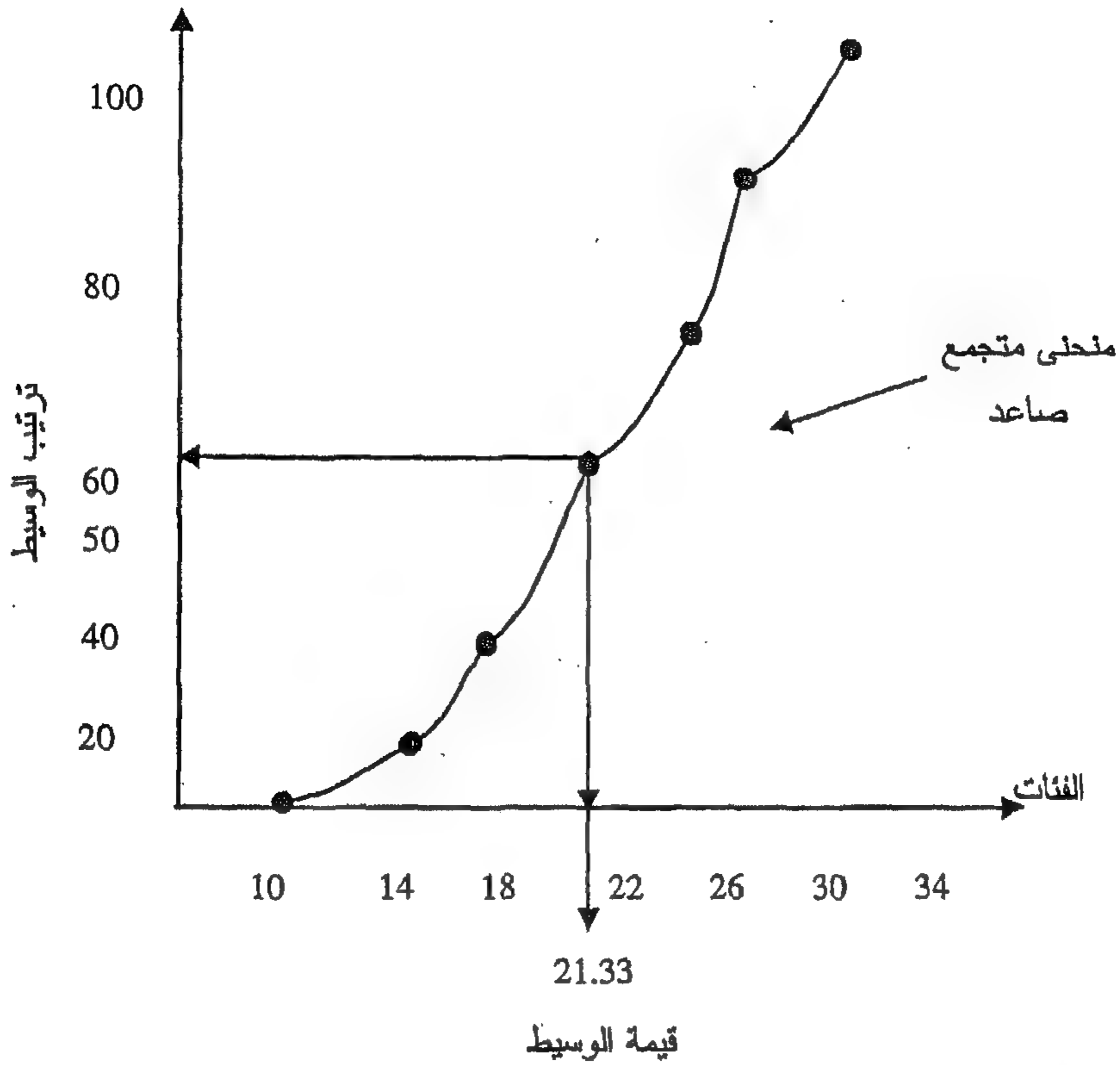


(2) يمكن إيجاد الوسيط بيانياً أيضاً باستخدام أحد المنحنيين المتجمعين (الصاعد أو الهابط) وترتيب الوسيط كما يتضح من الآتى :

- نحدد ترتيب الوسيط = $\frac{N}{2}$ / مج ك
- نكون الجدول المتجمع الصاعد أو الهابط
- نرسم المنحنى حسب الجدول السابق
- نمد خط من نقطة ترتيب الوسيط لتتلاقى المنحنى المتجمع الصاعد أو الهابط ثم نسقط عموداً من نقطة التلاقى على المحور الأفقى فى نقطة تمثل بذلك قيمة الوسيط .

بافتراض أننا سوف نقوم بإيجاد الوسيط من المنحنى المتجمع

الصاعد



ثالثاً : المنوال Mode

يُعرف بأنه القيمة الأكثر تكراراً أو شيوعاً بين مفردات مجموعة من القيم ويمكن حساب المنوال من القيم المطلقة أو البيانات المبوبة في شكل جدول توزيع تكرارى .

(أ) حساب المنوال من القيم المطلقة :

لحساب المنوال وفقاً للتعريف السابق يتم البحث عن أكثر القيم تكراراً أو ظهوراً .

مثال : أحسب المنوال للمجموعات التالية من البيانات :

المجموعة (أ) 25 ، 1 ، 2 ، 7 ، 5 ، 22 ، 37 ، 12 ، 17

المجموعة (ب) 10 ، 4 ، 2 ، 3 ، 6 ، 5 ، 1 ، 2

المجموعة (ج) 3 ، 5 ، 8 ، 6 ، 4 ، 5 ، 4

الحل :

المجموعة (أ) ليس لها منوال لأن كل القيم لها نفس التكرار .

المجموعة (ب) يوجد بها منوال وهو الرقم 2 لأنه تكرر أكثر من غيره.

المجموعة (ج) يوجد بها منوالين هما 4 ، 5 لأن لهما نفس التكرار .

ويلاحظ من الحل السابق أنه لا يمكننا اعتبار المنوال فى الحالتين (أ) ، (ج) مقياساً للنزعة المركزية .

(ب) حساب المنوال من البيانات المبوبة :

(1) الطريقة الحسابية : يوجد أكثر من طريقة لحساب المنوال بالطريقة الجبرية منها طريقة الرافعة وطريقة بيرسون (الفروق المجزئة) .

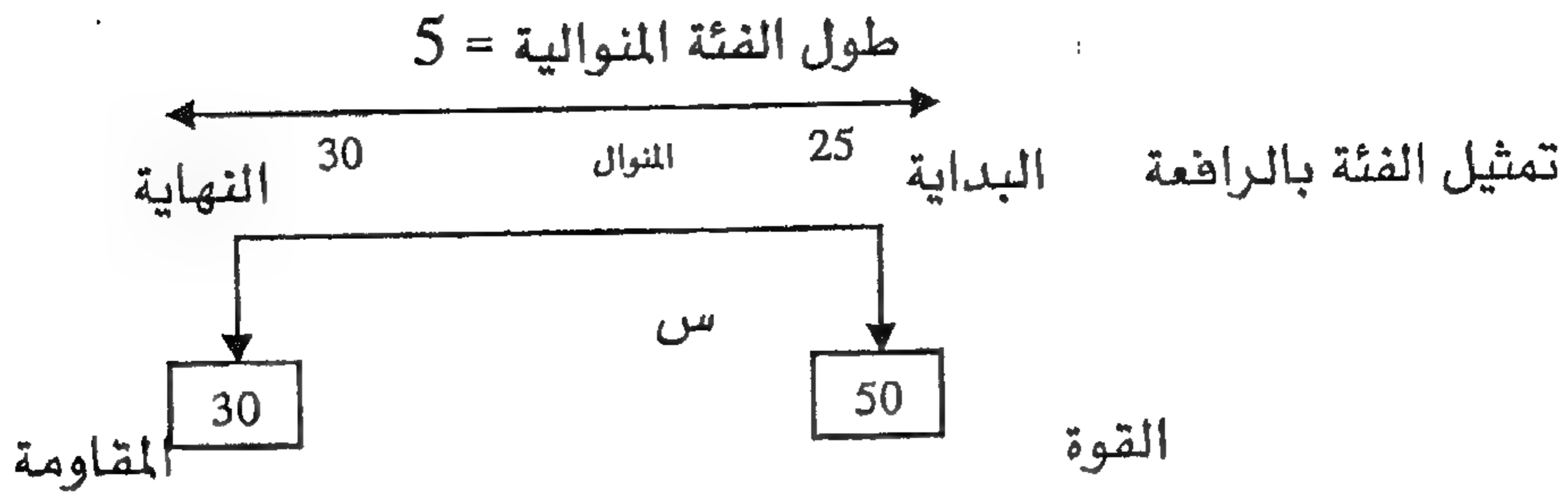
أ - طريقة الرافعة :

وفيهما تمثل الفئة المنوالية برافعة تحمل عند بدايتها التكرار السابق لتكرار الفئة المنوالية، وعند نهايتها التكرار اللاحق للفئة المنوالية . والفئة المنوالية هى الفئة المقابلة لأكبر تكرار فى جدول التوزيع التكرارى .

مثال : أوجد المنوال حسابياً من الجدول التكرارى الآتى :

| | | | | | | | |
|---|------|-----|------|------|------|---------|---------|
| ف | - 10 | -15 | - 20 | - 25 | - 30 | 35 - 40 | المجموع |
| ك | 10 | 30 | 50 | 100 | 30 | 20 | 240 |

الحل : الفئة المتوالية المقابلة لأكبر تكرار هي 25 - 30



نفرض أن المسافة من بداية الفئة المتوالية إلى المنوال = س،
وبالتالي تكون المسافة من المنوال حتى نهاية الفئة المتوالية هي 5 - س أى
طول الفئة المتوالية - س .

وللحصول على قيمة س نطبق قانون الروافع

$$\text{القوة} \times \text{ذراعها} = \text{المقاومة} \times \text{ذراعها}$$

$$50 \times \text{س} = 30 \times (5 - \text{س})$$

$$50 \text{ س} = 150 - 30 \text{ س}$$

$$80 \text{ س} = 150$$

$$\therefore \text{س} = \frac{150}{80} = 1.875$$

$$\therefore \text{المنوال} = \text{بداية الفئة المتوالية} + \text{س}$$

$$26.875 = 1.875 + 25 =$$

(ب) طريقة بيرسون (الفروق المجزئة) :

خطوات الحل:

- 1- نحدد الفئة المنوالية وهى الفئة المقابلة لأكبر تكرار .
 - 2- نوجد f_1 = تكرار الفئة المنوالية - التكرار السابق لها.
 - 3- نوجد f_2 = تكرار الفئة المنوالية - التكرار اللاحق لها.
 - 4- نحسب المنوال من القانون التالى
- $$\text{المنوال} = \frac{\text{الحد الأدنى للفئة المنوالية} + \text{الحد الأعلى للفئة المنوالية}}{2} \times \frac{f_1}{f_1 + f_2}$$

مثال : أوجد المنوال من المثال السابق

الحل : الفئة المنوالية 25 – 30

الحد الأدنى للفئة المنوالية = 25

تكرار الفئة المنوالية = 100

التكرار السابق للفئة المنوالية = 50

التكرار اللاحق للفئة المنوالية = 30

$$f_1 = 50 - 100 = -50$$

$$f_2 = 30 - 100 = -70$$

ل = الحد الأعلى للفئة المنوالية - الحد الأدنى للفئة المنوالية

$$= 30 - 25 = 5$$

$$\therefore \text{النوال} = 25 + \frac{50}{70 + 50} \times 5$$

$$27.08 = \frac{250}{120} + 25 =$$

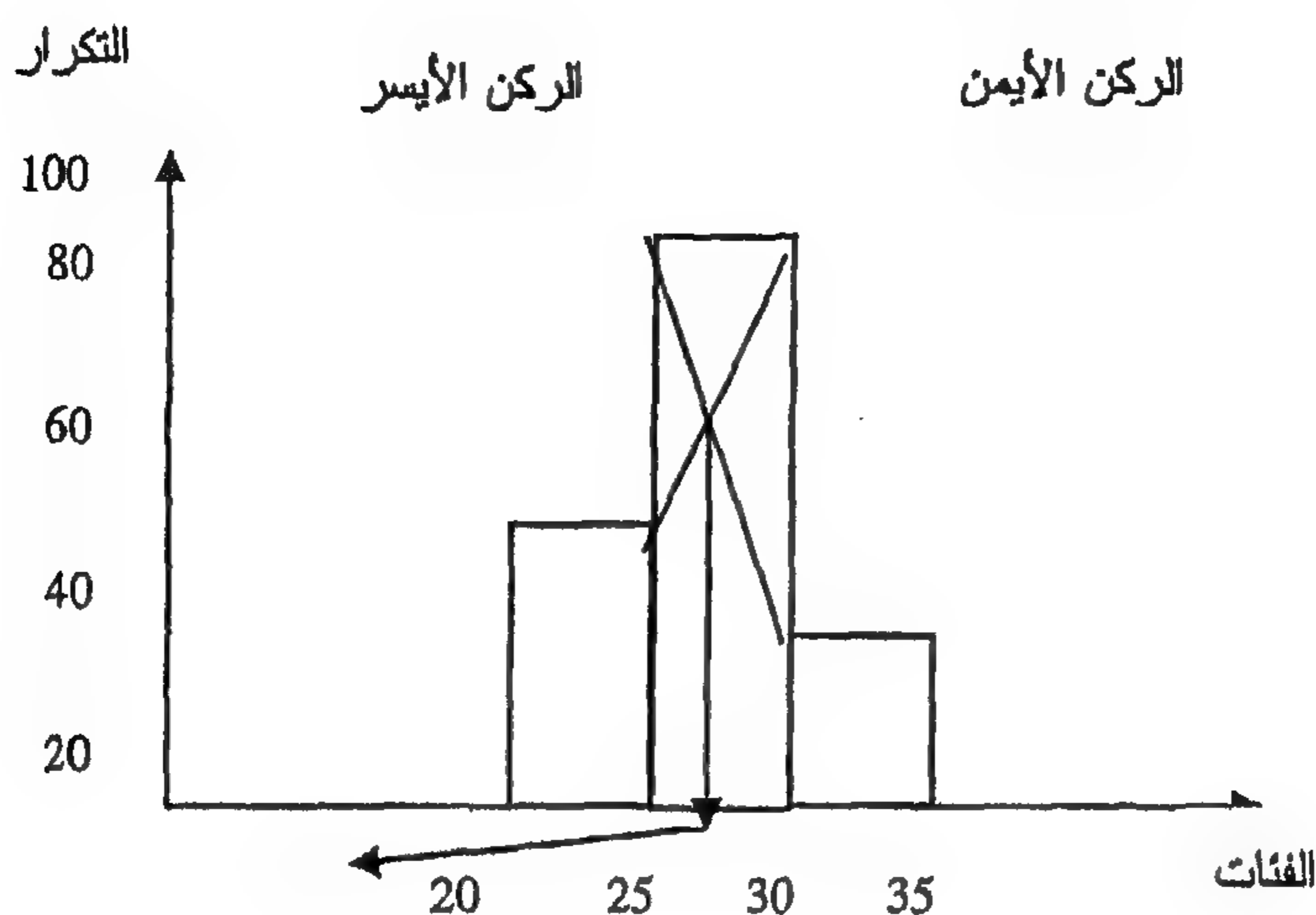
ويلاحظ إن نتائج هذه الطريقة أدق من الطريقة السابقة لأن طريقة الرافعة تهمل تكرار الفئة المنوالية، أما طريقة بيرسون فتأخذها في الاعتبار .

(2) الطريقة البيانية لإيجاد النوال :

تتلخص هذه الطريقة في رسم المدرج التكرارى (علاقة بين الفئات والتكرار) ومن تكرار الفئة المنوالية والسابقة واللاحقة لها يتم إيجاد النوال، ويتم إيصال الركن الأيمن للفئة المنوالية بالركن الأيمن للفئة السابقة لها وإيصال الركن الأيسر للفئة المنوالية بالركن الأيسر للفئة اللاحقة لها وعند تقاطع الخطين المتصلين بالأركان نسقط عمود على المحور الأفقى الممثل للفئات فنحصل على قيمة تقريبية للنوال وذلك كما يتضح من المثال التالى :

مثال : أوجد النوال بيانياً من الجدول التكرارى للمثال السابق

الحل : نحدد الفئة المنوالية والسابقة لها واللاحقة لها ورسم مدرج تكرارى للثلاث فئات كما يلى :



حساب المنوال من الجداول غير المنتظمة :

عند حساب المنوال من الجداول غير المنتظمة يلزم تعديل التكرار أولاً بالحصول على التكرار المعدل وذلك قبل تحديد الفئة المنوالية ثم يكمل الحل بإحدى الطرق السابقة، ويكون التكرار المعدل مساوياً للتكرار الأصيل مقسوماً على طول الفئة. وتكون الفئة المنوالية هى المقابلة لأكبر تكرار معدل .

مثال : أوجد قيمة المنوال من الجدول التكرارى التالى :

| ف | -10 | -12 | -14 | -15 | 20-18 | المجموع |
|---|-----|-----|-----|-----|-------|---------|
| ك | 10 | 20 | 40 | 30 | 20 | 120 |

الحل : يلاحظ أن هذا الجدول غير منتظم ولذلك يلزم أولاً

الحصول على التكرار المعدل كما يلى :

| ف | ك | ل | كـ ← التكرار المعدل |
|---------|-----|---|---------------------|
| -10 | 10 | 2 | 5 |
| -12 | 20 | 2 | 10 |
| -14 | 40 | 1 | 40 |
| -15 | 30 | 3 | 10 |
| 20-18 | 20 | 2 | 10 |
| المجموع | 120 | | |

الفئة المنوالية وهى التى تقابل أكبر تكرار معدل وهو 40

وتكون الفئة المنوالية هى 14-15 وبالتالى فإن

الحد الأدنى للفئة المنوالية = 14

تكرار الفئة المنوالية = 40

التكرار السابق للفئة المنوالية = 10

التكرار اللاحق للفئة المنوالية = 10

طول الفئة المنوالية (ل) = 1

$$ف_1 = 10 - 40 = 30$$

$$ف_2 = 10 - 40 = 30$$

$$\text{المنوال} = 14 + \frac{30}{30 + 30} \times 1$$

$$14.5 = \frac{1}{2} + 14 =$$

العلاقة بين مقاييس النزعة المركزية

توجد عدة علاقات بين مقاييس النزعة المركزية الثلاثة السابق ذكرها، وتتوقف هذه العلاقة على تماثل التوزيع أو التواءه كما يتضح فيما يلي :

1- إذا كان التوزيع متماثلاً فإن

$$\text{الوسط الحسابي} = \text{الوسيط} = \text{النوال}.$$

2- إذا كان التوزيع غير متماثل أو ملتوى فإن :

أ - إذا كان التوزيع ملتوى ناحية اليسار فإن :

$$\text{الوسط الحسابي} > \text{الوسيط} > \text{النوال}$$

ب- إذا كان التوزيع ملتوى ناحية اليمين فإن

$$\text{الوسط الحسابي} < \text{الوسيط} < \text{النوال}$$

$$3- \text{الوسط الحسابي} \times 2 = 3 \times \text{الوسيط} - \text{النوال}$$

$$\text{ومنها الوسط الحسابي} = \frac{3 \times \text{الوسيط} - \text{النوال}}{2}$$

$$4- \text{النوال} = 3 \times \text{الوسيط} - 2 \times \text{الوسط الحسابي}$$

$$5- \text{المتوسط} - \text{النوال} = 3 (\text{المتوسط} - \text{الوسيط})$$

رابعاً : الوسط الهندسي Geometric Mean

إذا كان لدينا مجموعة من القيم يرمز لها بالرمز s_1 ، s_2 ، ... فإن الوسط الهندسي لهذه المجموعة من القيم يمكن حسابه من الصيغة الرياضية التالية:

الوسط الهندسى س_ه = $\sqrt[n]{s_1 \times s_2 \times \dots \times s_n}$ (أ)
حيث ن هى عدد القيم

أى إنه يساوى الجذر النوى لحاصل ضرب مجموعة القيم المعطاة بالعدد ن .

ويمكن باستخدام اللوغاريتمات اختصار العمليات الحسابية المعقدة فإذا رمزنا للوسط الهندسى بالرمز هـ ونأخذ لوغاريتم الطرفين ينتج أن

$$\log = \log(s_1 \times s_2 \times \dots \times s_n) \quad \frac{1}{n} \quad \dots \dots (ب)$$

ومن خصائص اللوغاريتمات $\log a^b = b \log a$

$$\log a \times b = \log a + \log b$$

وتطبق هاتين الخاصيتين على المعادلة (ب) ينتج

$$\log = \frac{1}{n} (\log s_1 + \log s_2 + \dots + \log s_n)$$

$$= \frac{1}{n} \log s$$

وذلك يعنى أن لوغاريتم الوسط الهندسى لمجموعة من القيم يساوى الوسط الحسابى للوغاريتمات هذه القيم .

مثال : أوجد الوسط الهندسى لمجموعة القيم 60 , 55 , 70 , 62 , 67

$$\text{الحل : } \log = \frac{1}{5} (\log 60 + \log 50 + \log 70 + \log 62 + \log 67)$$

$$(1.83 + 1.79 + 1.84 + 1.74 + 1.77) \frac{1}{5} =$$

$$1.80 = (8.98) \frac{1}{5} =$$

وبالنظر فى جداول الأعداد المقابلة ينتج أن هـ = 62.60 تقريباً .

حل آخر : يمكن حل التمرين السابق مباشرة باستخدام المعادلة

(أ) لحساب الوسط الهندسى .

$$\text{هـ} = \sqrt[5]{67 \times 62 \times 70 \times 50 \times 60}$$

$$\sqrt[5]{(959547000)} = \sqrt[5]{959547000} =$$

$$= 62.58 \text{ تقريباً}$$

ملحوظة : للحصول على الجذر الخامس لهذا الرقم باستخدام

الآلة الحاسبة نتبع الخطوات التالية :

1- نكتب الرقم المطلوب إيجاد الجذر الخامس له فى الآلة الحاسبة .

2- نك على زر INV أو Shift فى الآلة الحاسبة

3- نك على زر X

4- نكتب 0.2 وهى قيمة $\frac{1}{5}$

5- نك على علامة = فنحصل على الجذر المطلوب

للتدريب : أوجد $\sqrt[5]{32}$ (الحل 20)

أوجد $\sqrt[5]{243}$ (الحل 3)

ملحوظة : الوسط الهندسى هو الوسط المثالى فى حالة حساب متوسط النسب أو المعدلات .

طريقة أخرى لاستخدام الماكينة أو الآلة الحاسبة :

1- نكتب الرقم المطلوب إيجاد جذره وليكن جذر (ن) .

2- نترك على زرار \boxed{INV} أو \boxed{Shift}

3- نترك على زرار $\boxed{\div}$ نكتب دليل الجذر أو قيمة (ن)

4- نترك على علامة $\boxed{=}$ فنحصل على المطلوب

للتدريب : أوجد $\sqrt[7]{150}$ (الحل 2.0458)

أوجد $\sqrt[8]{260}$ (الحل 2.0038)

أوجد $\sqrt[12]{4658}$ (الحل 2.0215)

ملحوظة : إذا كانت $n = \sqrt[n]{s}$ حيث ن تسمى دليل الجذر

فإن $n = (s)^{\frac{1}{n}}$ حيث $\frac{1}{n}$ تسمى الأس

وبمعلومية الخاصية مقام الأس = دليل الجذر فإنه يمكننا

تحويل أى جذر فمثلاً :

$$\sqrt[10]{s} = (s)^{\frac{1}{10}}$$

$$\sqrt[8]{s} = (s)^{\frac{1}{8}} \text{ وهكذا}$$

إيجاد الوسط الهندسى فى حالة البيانات المبوبة :

فى هذه الحالة للحصول على الوسط الهندسى يطبق القانون

التالى :

$$\text{هـ} = \sqrt[n]{s_1^{f_1} \times s_2^{f_2} \times \dots \times s_n^{f_n}} \quad (أ) \dots$$

حيث مج ك هى مجموع التكرارات

ك 1 ك 2 هى التكرارات

س هى مركز الفئة

ويأخذ لوغاريتم الطرفين من المعادلة (أ) فإن

$$\text{لو هـ} = \text{لو} [s_1^{f_1} \times s_2^{f_2} \times \dots \times s_n^{f_n}] \quad \frac{1}{\text{مج ك}}$$

$$= \frac{1}{\text{مج ك}} [\text{لوس } s_1^{f_1} + \text{لوس } s_2^{f_2} + \dots + \text{لوس } s_n^{f_n}]$$

$$= \frac{1}{\text{مج ك}} [ك 1 \text{ لوس } s_1 + ك 2 \text{ لوس } s_2 + \dots + ك ن \text{ لوس } s_n]$$

$$= \frac{\text{مج ك لوس}}{\text{مج ك}}$$

مج ك

مثال : أوجد الوسط الهندسى من الجدول التكرارى التالى :

| الفئات | -10 | -20 | -30 | -40 | 60-50 |
|---------|-----|-----|-----|-----|-------|
| التكرار | 12 | 25 | 35 | 20 | 8 |

الحل : نكون الجدول التالي :

| ف | ك | س | لوس | ك لوس |
|---------|-----|----|-------|--------|
| -10 | 12 | 15 | 1.176 | 17.640 |
| -20 | 25 | 25 | 1.397 | 34.925 |
| -30 | 35 | 35 | 1.544 | 54.040 |
| -40 | 20 | 45 | 1.653 | 74.385 |
| 60-50 | 8 | 55 | 1.740 | 95.700 |
| المجموع | 100 | | | 276.69 |

$$\text{لوه} = \frac{\text{مجموع لوس}}{\text{مجموع ك}} = \frac{276.69}{100} = 2.7669$$

∴ ه = 584.66

ملحوظة : لإيجاد قيمة ه نجرى الخطوات التالية .

- 1- نكتب قيمة لوه فى الآلة الحاسبة .
 - 2- نضغط على IN V ثم نضغط على زر Log فنحصل على قيمة ه
- خامساً : المتوسط الموزون :

وفى بعض الأحيان يسمى المتوسط الحسابى المرجح ويستخدم فى حالة إذا كان لبعض القيم وزناً أكثر من غيرها ، فإذا أردنا أن نأخذ الأهمية النسبية فى الاعتبار عن حساب المتوسط الحسابى فيفضل استخدام المتوسط الموزون فإذا كان لدينا القيم س₁ ، س₂ ، ... س_n والوزن المقابل لكل قيمة هو 1 ، 2 ، ... فإن المتوسط الحسابى الموزون لهذه القيم يعبر عنه بالعلاقة .

$$\frac{س1 و1 + س2 و2 + ... س٣٠ و٣٠}{و1 + و2 + و3 + ... و٣٠} = \text{الوسط الحسابي الموزون}$$

$$= \frac{\text{مجم س و}}{\text{مجم و}}$$

مجم و

مثال : مصنع ملابس لديه ثلاثة أنواع من البدل الجاهزة ، فإذا كان سعر البدله من النوع الأول 250 دينار ومن النوع الثاني 350 دينار ومن النوع الثالث 500 دينار ، وإذا علمت أن النوع الأول يوجد منه 100 قطعة والنوع الثاني 60 قطعة والنوع الثالث 40 قطعة فأوجد متوسط سعر القطعة .

الحل :

$$\text{المتوسط الموزون} = \frac{40 \times 500 + 60 \times 350 + 100 \times 250}{40 + 60 + 100} = 330 \text{ دينار}$$

تمارين

(1) أوجد الوسط الحسابي للقيم 15 , 12 , 7 , 20 , 8 , 10 مرة
بالطريقة العادية ومرة أخرى بطريقة الانحرافات ومرة ثالثة
بالطريقة المختصرة .

(2) لديك جدول التوزيع التكرارى التالى

| ف | -15 | -25 | -35 | -45 | -55 | -65 | -75 | 95-85 | المجموع |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-------|---------|
| ك | 5 | 10 | 10 | 25 | 20 | 15 | 10 | 5 | 100 |

أوجد : 1- الوسط الحسابي بالطريقة العادية.

2- الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات.

3- الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة.

(3) أوجد الوسيط لمجموعتى البيانات الآتية :

مجموعة (أ) : 8,9,20,17,15

مجموعة (ب) : 30,9,25,16,18,20

(4) أوجد الوسيط من بيانات جدول التوزيع التكرارى التالى

| ف | -10 | -20 | -30 | -40 | -50 | 70-60 | المجموع |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-------|---------|
| ك | 10 | 20 | 30 | 50 | 40 | 10 | 160 |

(5) أوجد المنوال من مجموعتى البيانات الآتية :

مجموعة (أ) : 1,2,4,3,5,2

مجموعة (ب) : 1,3,5,2,3,4,5

(6) أوجد المنوال من بيانات جدول تمرين (4)

(7) أوجد قيمة المنوال من جدول التوزيع التكرارى التالى :

| ف | -20 | -24 | -28 | -30 | -35 | 50-40 | المجموع |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-------|---------|
| ك | 40 | 60 | 80 | 40 | 20 | 12 | 252 |

(8) أوجد الوسط الحسابى والوسيط والمنوال للقيم الآتية :

(أ) : 8,6,4,6,7,8,6,5

(ب) : 5,12,4,12,9,6

(9) من الجدول التكرارى التالى :

| ف | -10 | -20 | -30 | -40 | -50 | -60 | -70 | 90-80 | المجموع |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-------|---------|
| ك | 5 | 10 | 15 | 20 | 35 | 50 | 20 | 5 | 160 |

أوجد : 1- الوسط الحسابى

2- الوسيط جبرياً وبيانياً

3- المنوال جبرياً وبيانياً

4- العلاقة بين الوسط الحسابى والوسيط والمنوال

(10) احسب الوسط الهندسى للقيم 190,180,114,136,105

(11) أحد شركات الموبيل تباع ثلاثة أنواع من الأجهزة نوکیا وأر

یکسون وموتوریللا سعر القطعة من النوع الأول 1200 دينار ومن

النوع الثانى 1100 دينار ومن النوع الثالث 900 دينار فإذا كان

متوافر لدى الشركة 10 قطع من النوع الأول و25 قطعة من النوع

الثانى و15 قطعة من النوع الثالث . فأوجد متوسط سعر القطعة

من كل نوع من الأنواع الثلاثة .

الفصل الرابع

مقاييس التشتت *Dispersion*

تمهيد :

يقصد بالتشتت درجة الاختلاف أو التفاوت بين مجموعة من القيم ، فإذا كانت القيم متقاربة من بعضها يكون تشتتها أقل والعكس صحيح أى إذا كانت متباعدة عن بعضها يكون تباينها كبير.

وقد تكون مقاييس النزعة المركزية السابق ذكرها غير معبرة صراحة عن طبيعة الظاهرة محل البحث والدراسة لأنه قد يتساوى متوسط أى مجموعتين من القيم ولكن فى نفس الوقت يكون هناك اختلاف أو تباين كبير بين مفردات كل منهما مما يعطى نتائج مضللة فى حالة الاكتفاء بنتائج المتوسط فقط .

ويمكن توضيح ذلك من خلال المثال التالى :

مثال : إذا كان لدينا مجموعتين من القيم

مجموعة (1) : 8 , 10 , 12 , 14 , 16

مجموعة (2) : 2 , 4 , 12 , 18 , 24

فالوسط الحسابى فى كل من المجموعتين يساوى 12 فإذا اكتفينا بالوسط الحسابى فقط لأعطينا انطباعاً بأن مجموعتى البيانات (1) ، (2) متشابهتين فى حين أن قيم المجموعة (1) أكثر تقارباً وبالتالى أقل تبايناً من قيم المجموعة (2)

فمثلاً المدى للمجموعة (1) هو $16 - 8 = 8$

والمدى للمجموعة (2) هو $24 - 2 = 22$

وبالتالى يقال أن المجموعة (2) أكثر تشتتاً من المجموعة (1) .

ومن أهم مقاييس التشتت :

- 1- المدى Range
- 2- الانحراف المتوسط Average Deviation
- 3- الانحراف الربيعي Quartile Deviation
- 4- الانحراف المعياري Standard Deviation
- 5- معامل الاختلاف Coefficient of Variation

أولاً: المدى Range

هو أبسط مقاييس التشتت وأسهلها في الحساب، ويعرف بأنه عبارة عن الفرق بين أكبر وأقل قيمة من بين مفردات القيم . ويعتبر المدى أقل مقاييس التشتت استخداماً لاعتماده على قيمتين فقط في حسابه لذا فقد يعطى بيانات مضللة في حالة وجود قيم شاذة متطرفة. بالإضافة إلى صعوبة حسابه من الجداول المفتوحة مما يلزم الرجوع للقيم الأصلية .

ثانياً: الانحراف الربيعي Quartile Deviation

ويطلق عليه في بعض الأحيان نصف المدى الربيعي . ويستخدم هذا المقياس لمعالجة عيوب المدى وأهمها تأثره بالقيم الشاذة والمتطرفة ، كما أنه المقياس التشتتي الوحيد الذي يستخدم في حالة البيانات المبوبة في شكل جدول توزيع تكراري مفتوح . ويعبر عن نصف المدى الربيع بالصيغة الرياضية التالية :

$$\text{نصف المدى الربيعي} = \frac{\text{الربيع الأعلى} - \text{الربيع الأدنى}}{2}$$

ويمكن الحصول عليه بيانياً من خلال رسم منحني التكرار المتجمع الصاعد أو الهابط وباستخراج قيمة الربيع الأعلى والأدنى يتم حساب نصف المدى الربيعي . وطريقة حساب الربيع الأدنى والربيع الأعلى لا تختلف عن طريقة حساب الوسيط والذي يسمى في بعض الأحيان باسم الربيع الأوسط . ويرمز للربيع الأدنى بالرمز (ر1) وللوسيط بالرمز (ر2) وللربيع الأعلى بالرمز (ر3).

(١) الربيع الأدنى (ر1) Lower Quartile

يعرف بأنه القيمة التي تقسم قيم الظاهرة إلى جزئين بحيث يقع 25% من القيم قبلها و 75% من القيم بعدها . وخطوات حسابه كالاتي :

$$1- \text{ترتيب الربيع الأدنى} = \frac{\text{مجموع التكرارات}}{4}$$

2- نحدد فئة الربيع الأدنى من جدول التكرار المتجمع الصاعد أو الهابط .

3- نطبق القانون التالي لحسابه .

الربيع الأدنى = الحد الأدنى لفئة الربيع الأدنى

$$\left[\frac{\text{ترتيب الربيع الأدنى} - \text{ت م ص السابق لترتيب الربيع الأدنى}}{\text{ت م ص اللاحق} - \text{ت م ص السابق}} \right] +$$

× طول فئة الربيع الأدنى

مثال : من جدول التوزيع التكراري التالي أوجد الربيع الأدنى .

| ف | -20 | -30 | -40 | -50 | -60 | 80-70 | المجموع |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-------|---------|
| ك | 10 | 15 | 30 | 22 | 14 | 9 | 100 |

الحل أولاً : نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد

| الفئات | التكرار المتجمع |
|-----------|--------------------|
| أقل من 20 | 0 |
| أقل من 30 | 10 |
| أقل من 40 | 25 |
| أقل من 50 | 55 |
| أقل من 60 | 77 |
| أقل من 70 | 91 |
| أقل من 80 | 100 |

$$25 = \frac{100}{4} = \frac{\text{مجموع}}{4} = \text{ترتيب الربع الأدنى}$$

فئة الربع الأدنى 50 - 40

$$\text{الربع الأدنى} = 40 + \frac{10 - 25}{10 - 55} \times 10$$

$$= 43.33 \text{ تقريباً}$$

(ب) الربع الأعلى (3) Upper Quartile

هو القيمة التي تقسم مجموعة القيم إلى قسمين بحيث يقع 75% من القيم قبلها و 25% من القيم بعدها .

وخطوات حساب الربيع الأعلى هي نفسها خطوات حساب الربيع الأدنى مع الاختلاف في ترتيب الربيع الأعلى وقانون الربيع الأعلى هو :

$$\text{ترتيب الربيع الأعلى} = \text{مجدك} \times \frac{3}{4}$$

$$\text{الربيع الأعلى} = \text{الحد الأعلى لفئة الربيع الأعلى}$$

$$+ \left[\frac{\text{ترتيب الربيع الأعلى} - \text{ت م ص السابق لترتيب الربيع الأعلى}}{\text{ت م ص اللاحق} - \text{ت م ص السابق}} \right]$$

$$\times \text{طول فئة الربيع الأعلى}$$

مثال : احسب الربيع الأعلى من المثال السابق.

$$\text{الحل : ترتيب الربيع الأعلى} = \text{مجدك} \times \frac{3}{4}$$

$$75 = \frac{3}{4} \times 100 =$$

$$\text{فئة الربيع الأعلى} = 60 - 50$$

$$\begin{aligned} & \frac{\text{الربيع الأعلى} - \text{الربيع الأدنى}}{2} \\ & \frac{55 - 75}{10} \times \frac{55 - 77}{55 - 77} + 50 = \text{الربيع الأعلى} \\ & = 59.09 \text{ تقريباً} \end{aligned}$$

مثال أوجد الانحراف الربيعي من بيانات جدول التوزيع

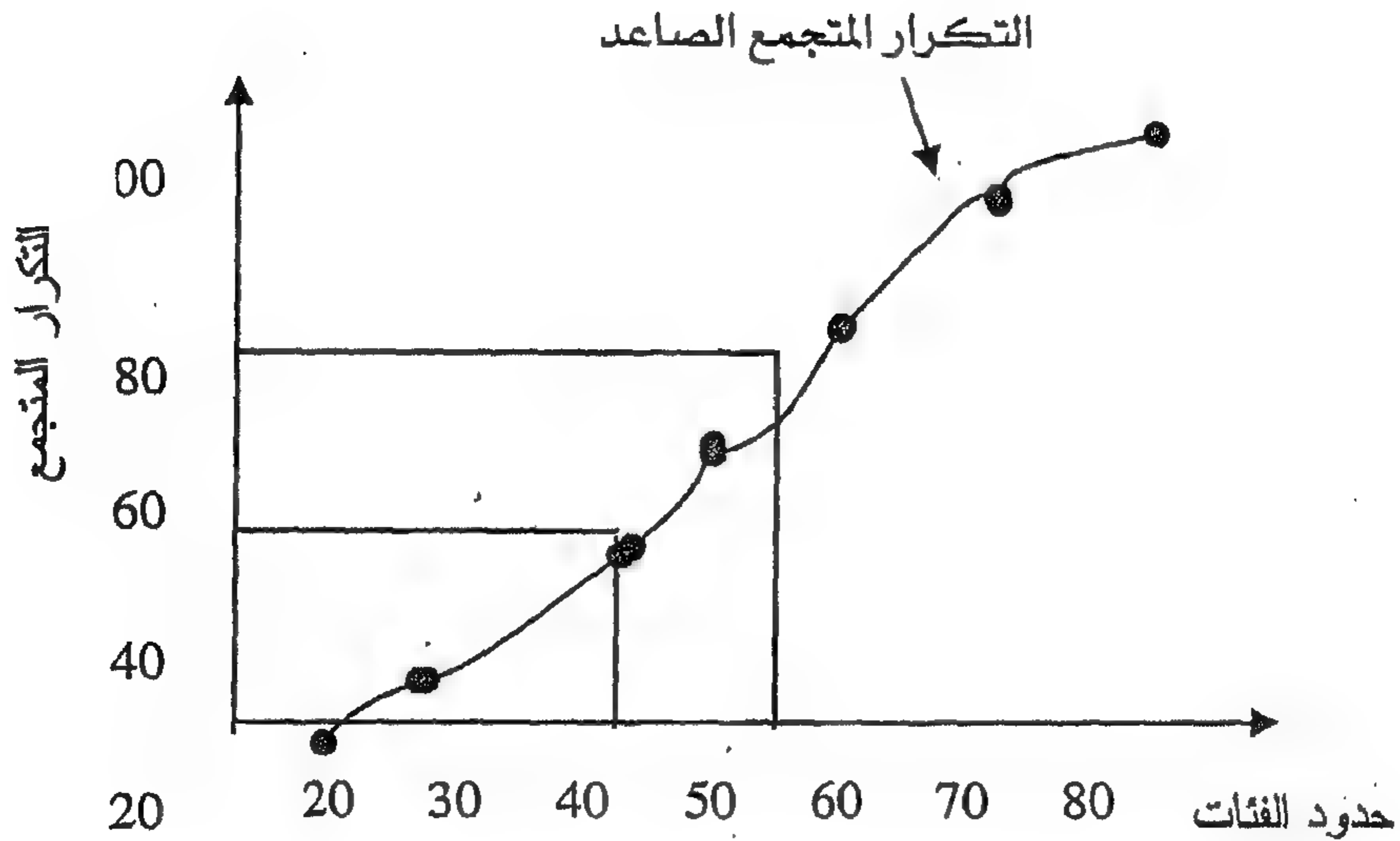
التكراري السابق .

$$\text{الحل : الانحراف الربيعي} = \frac{\text{الربيع الأعلى} - \text{الربيع الأدنى}}{2}$$

$$7.88 = \frac{43.33 - 59.09}{2} =$$

إيجاد الربيعين بيانياً :

لإيجاد قيمة الربيع الأدنى نعين ترتيبه على المحور الرأسى الذى يمثل التكرار المتجمع الصاعد ثم نرسم خطاً أفقياً ليقابل المتجمع الصاعد فى نقطه ، نسقط منها عموداً على المحور الأفقى الذى يمثل حدود الفئات لنحصل على قيمة الربيع الأدنى . ولإيجاد قيمة الربيع الأعلى نحدد ترتيبه على المحور الرأسى ونتبع نفس الطريقة لتعيين قيمته على المحور الأفقى فنجد قيمته = 59.09 كما يتضح من الرسم .



ثالثاً : الانحراف المتوسط Mean Deviation

ويعرف بأنه متوسط القيمة العددية لانحرافات القيم عن وسطها الحسابى . وهذا المقياس مؤشر لمدى تقارب أو تباعد مجموعة من القيم عن وسطها الحسابى.

ويمكن حساب الانحراف المتوسط من القيم المطلقة أو من البيانات المبوبة .

(أ) حساب الانحراف المتوسط من القيم المطلقة :

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{1}{n} \text{مجم} |s - \bar{s}|$$

حيث n = عدد القيم

وأن القيمة العددية لأي عدد سالب = موجب نفس العدد

$$\text{أي } |4 - 4| = 4$$

مثال : احسب الانحراف المتوسط للقيم 4 , 5 , 8 , 3

$$\bar{s} = \frac{3 + 8 + 5 + 4}{4} = 5$$

| القيم (س) | $ s - \bar{s} $ |
|-----------|-----------------|
| 4 | $5 - 4 = 1$ |
| 5 | $5 - 5 = 0$ |
| 8 | $8 - 5 = 3$ |
| 3 | $5 - 3 = 2$ |
| المجموع | 6 |

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{6}{4} = 1.5$$

(ب) حساب الانحراف المتوسط من البيانات المبوبة :

لحساب الانحراف المتوسط من البيانات المبوبة نتبع الخطوات التالية :

1- نحسب الوسط الحسابي من جدول التوزيع التكراري بأحد الطرق

الثلاثة السابق ذكرها

$$\bar{S} = \frac{\text{مجموع } S \cdot K}{\text{مجموع } S}$$

2- نحسب القيمة العددية لانحرافات مركز كل فئة عن الوسط

$$\text{الحسابي أي نحصل على } |S - \bar{S}|$$

3- نضرب $|S - \bar{S}|$ في تكرار كل فئة ثم نحصل على

$$\text{مجموع } |S - \bar{S}|$$

4- نطبق العلاقة التالية للحصول على الانحراف المتوسط

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{\text{مجموع } |S - \bar{S}| \cdot K}{\text{مجموع } K}$$

مثال : احسب الانحراف المتوسط من جدول التوزيع التكراري التالي

| ف | -10 | -20 | -30 | -40 | 60-50 | المجموع |
|---|-----|-----|-----|-----|-------|---------|
| ك | 5 | 15 | 50 | 20 | 10 | 100 |

الحل

| الفئات | التكرار | S | S · K | S - \bar{S} | S - \bar{S} · K |
|---------|---------|----|-------|---------------|---------------------|
| -10 | 5 | 15 | 75 | 21.5 | 107.5 |
| -20 | 15 | 25 | 375 | 11.5 | 172.5 |
| -30 | 50 | 35 | 1750 | 1.5 | 75.0 |
| -40 | 20 | 45 | 900 | 8.5 | 170 |
| 60-50 | 10 | 55 | 550 | 18.5 | 185 |
| المجموع | 100 | | 3650 | | 710 |

$$\text{الوسط الحسابى} = \frac{\text{مجموع } x \text{ ك}}{\text{مجموع ك}} = \frac{3650}{100} = 36.50$$

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{\text{مجموع ك} |s - \bar{s}|}{\text{مجموع ك}} = \frac{710}{100} = 7.1$$

رابعاً: الانحراف المعياري Standard Deviation

وهو من أهم مقاييس التشتت وأكثرها استخداماً وذلك لدخوله فى حساب كثير من المقاييس الإحصائية الأخرى. وهو يشبه الانحراف المتوسط فى اعتماده على كل قيم المجموعة ونحصل عليه بتربيع انحرافات القيم عن وسطها الحسابى (بدلاً من إهمال الإشارة كما فى حالة الانحراف المتوسط) وبذلك نحصل على مقياس آخر للتشتت يسمى بالتباين Variance ويرمز له بالرمز σ^2

$$\sigma^2 = \frac{\sum (s - \bar{s})^2}{n}$$

وهو عبارة عن متوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى وللحصول على الانحراف المعياري نحصل على الجذر التربيعى للتباين .

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (s - \bar{s})^2}{n}}$$

أى أن الانحراف المعياري (ع) هو الجذر التربيعى للتباين (ع²) ويمكن حساب الانحراف المعياري من القيم المطلقة أو من البيانات المبوبة .

أولاً : القيم المطلقة :

1- حساب الانحراف المعياري بالطريقة المطولة باستخدام القيم المطلقة :

يتضح مما سبق أن حساب التباين بالطريقة السابقة يحتاج إلى عمليات حسابية كثيرة ومعقدة خاصة إذا احتوى الوسط الحسابي \bar{S} على كسور مما يتتبعه احتواء انحرافات القيم عن وسطها الحسابي $(S - \bar{S})$ على كسور أيضاً ومن ثم صعوبة حساب مربعاتها ، لذلك من المفضل استخدام طريقة أخرى لحساب التباين لا تتضمن حسابات كثيرة ومعقدة وهذه الطريقة هي :

$$\sigma^2 = \frac{\sum S^2}{N} - \left[\frac{\sum S}{N} \right]^2$$

أي أن التباين هو (متوسط المربعات - مربع المتوسط)

وبالتالي فإن الانحراف المعياري يكون :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum S^2}{N} - \left[\frac{\sum S}{N} \right]^2}$$

وتسمى هذه الطريقة باسم الطريقة المطولة

مثال : اثبت أن $\sum (S - \bar{S})^2 = \sum S^2 - 2\bar{S} \sum S + N\bar{S}^2$

$$\sum (S - \bar{S})^2 = \sum S^2 - 2\bar{S} \sum S + N\bar{S}^2$$

الحل : $\sum (S - \bar{S})^2 = \sum S^2 - 2\bar{S} \sum S + N\bar{S}^2$

$$= \sum S^2 - 2\bar{S} \sum S + N\bar{S}^2$$

$$\frac{\text{مج س}^2}{\text{ن}} + \frac{\text{مج س}^2}{\text{ن}} = \text{مج س}^2$$

$$\frac{\text{مج س}^2}{\text{ن}} - \text{مج س}^2 =$$

وبضرب الطرفين في 1 / ن

$$2 \left[\frac{\text{مج س}}{\text{ن}} \right] - \frac{\text{مج س}^2}{\text{ن}} = \frac{\text{مج}^2 (\text{س} - \text{س})}{\text{ن}}$$

مثال : أوجد الانحراف المعياري للقيم الآتية : 3 , 8 , 5 , 4

$$\text{الحل : س} = \frac{3 + 8 + 5 + 4}{4} = 5$$

| س | س - س | $(\text{س} - \text{س})^2$ |
|---------|-------|---------------------------|
| 4 | 1- | 1 |
| 5 | 0 | 0 |
| 8 | 3 | 9 |
| 3 | 2- | 4 |
| المجموع | | 14 |

$$1.87 = \frac{\sqrt{14}}{4} = \frac{\sqrt{\text{مج}^2 (\text{س} - \text{س})}}{\text{ن}} = \text{ع}$$

حل آخر :

| س | س ² | |
|---------|----------------|-----|
| 4 | 16 | |
| 5 | 25 | |
| 8 | 64 | |
| 3 | 9 | |
| المجموع | 20 | 114 |

$$ع = \sqrt{\frac{\sum \text{مجد س}^2}{ن} - \left(\frac{\sum \text{مجد س}}{ن}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{114}{4} - \left(\frac{20}{4}\right)^2}$$

$$= \sqrt{28.5 - 25} = 1.87$$

2- حساب الانحراف المعياري بطريقة الانحرافات :

وفيها يتم اختيار وسط فرضي بدلاً من الوسط الحسابي، ثم

نستخدم القانون التالي لحساب الانحراف المعياري .

$$ع = \sqrt{\frac{\sum \text{مجد س}^2}{ن} - \left(\frac{\sum \text{مجد س}}{ن}\right)^2}$$

حيث $ح = س - و$

س ← قيمة المشاهدة

و ← الوسط الفرضي

مثال : احسب الانحراف المعياري بطريقة الانحرافات من بيانات المثال السابق .

الحل : البيانات هي 3 , 8 , 5 , 4

نفرض أن الوسط الفرضي $و = 5$

| س | ح = س - و | ح ² |
|---------|-----------|----------------|
| 4 | 1- | 1 |
| 5 | 0 | 0 |
| 8 | 3 | 9 |
| 3 | 2- | 4 |
| المجموع | 0 | 14 |

$$1.87 = \sqrt{\frac{14}{4}} = \sqrt{\frac{0}{4}} - \frac{14}{4} =$$

3- حساب الانحراف المعياري بطريقة الانحرافات المختصرة :

ومن خلال هذه الطريقة يتم قسمة الانحرافات (ح) على رقم ثابت كعامل مشترك ثم نستخدم هذه البيانات في الحصول على الانحراف المعياري من خلال تطبيق القانون التالي :

$$ع = \sqrt{\frac{\sum (مجد ح)^2}{ن} - \frac{(\sum مجد ح)^2}{ن^2}}$$

حيث $\frac{\sum ح}{ن}$ هي العامل المشترك ، $ح = \frac{\sum ح}{ن}$

مثال : أوجد الانحراف المعياري بطريقة الانحرافات المختصرة للقيم

145 , 140 , 135 , 130 , 125

الحل

| قيم س | ح = س - 130 | ح = $\frac{\sum ح}{ن}$ | $\sum ح^2$ |
|---------|-------------|------------------------|------------|
| 125 | 5- | 1- | 1 |
| 130 | 0 | 0 | 0 |
| 135 | 5+ | 1 | 1 |
| 140 | 10+ | 2 | 4 |
| 145 | 15+ | 3 | 9 |
| المجموع | 25 | 5 | 15 |

$$ع = \sqrt{\frac{\sum (مجد ح)^2}{ن} - \frac{(\sum مجد ح)^2}{ن^2}}$$

$$ع = \sqrt{\frac{15}{5} - \frac{25}{25}}$$

$$ع = \sqrt{1 - 3}$$

$$ع = \sqrt{2} = 1.41$$

ثانياً : البيانات المبوبة :

1- حساب الانحراف المعياري بالطريقة المطولة :

يمكن حساب الانحراف المعياري من البيانات المبوبة في

شكل جدول توزيع تكراري بالطريقة المطولة كما يأتي .

$$ع = \sqrt{\frac{\sum \left(\frac{\text{مجم س ك}^2}{\text{مجم ك}} \right) - \frac{\text{مجم س}^2 \text{ ك}}{\text{مجم ك}}}{n}}$$

حيث س هي مركز الفئة ، ك هي التكرار

مثال : احسب الانحراف المعياري بالطريقة المطولة من بيانات

الجدول التكراري:

| ف | -90 | -100 | -110 | -120 | -130 | 140-150 | المجموع |
|---|-----|------|------|------|------|---------|---------|
| ك | 3 | 14 | 16 | 11 | 4 | 2 | 50 |

الحل : نكون الجدول التالي :

| ف | ك | س | س ك | س ² ك |
|---------|----|-----|------|------------------|
| -90 | 3 | 95 | 285 | 27075 |
| -100 | 14 | 105 | 1470 | 154350 |
| -110 | 16 | 115 | 1840 | 211600 |
| -120 | 11 | 125 | 1375 | 171875 |
| -130 | 4 | 135 | 540 | 72900 |
| 150- | 2 | 145 | 290 | 42050 |
| 140 | | | | |
| المجموع | 50 | | 5800 | 679850 |

$$= \sqrt{2 \left(\frac{5800}{50} \right) - \frac{679850}{50}} = \epsilon$$

$$= \sqrt{13456 - 13597}$$

$$= \sqrt{141} = 11.9 \text{ تقريباً}$$

2- حساب الانحراف المعياري بطريقة الانحرافات :

لتسهيل العمليات الحسابية يمكن اختيار وسط فرضي (و) من بين مراكز الفئات (س) وتحسب الانحرافات عن هذا الوسط الفرضي ويتم حساب الانحراف المعياري من الصيغة التالية :

$$= \sqrt{2 \left(\frac{\text{مجم ح ك}}{\text{مجم ك}} \right) - \frac{\text{مجم ح}^2 \text{ ك}}{\text{مجم ك}}}$$

ويلاحظ من هذه الصيغة أنه تتبع نفس الخطوات السابق ذكرها عند حساب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات ثم يزداد على ذلك عمود واحد هو ح² ك كما يتضح من المثال التالي :

مثال : احسب الانحراف المعياري بطريقة الانحرافات من بيانات المثال السابق .

الحل :

| ف . | ك | س | ح = س - و | ح × ك | ح ² × ك |
|---------|----|------------|-----------|-------|--------------------|
| -90 | 3 | 95 | 20- | 60- | 1200 |
| -100 | 14 | 105 | 10- | 140- | 1400 |
| -110 | 16 | <u>115</u> | 0 | 0 | 0 |
| -120 | 11 | 125 | 10 | 110 | 1100 |
| -130 | 4 | 135 | 20 | 80 | 1600 |
| 150- | 2 | 145 | 30 | 60 | 1800 |
| 140 | 50 | | | 50 | 7100 |
| المجموع | | | | | |

لاحظ أننا اخترنا القيمة 115 كوسط فرضي، والوسط

الفرضي عادة يكون مركز الفئة الموجود أمام أكبر تكرار.

$$ع = \sqrt{\left(\frac{50}{50}\right)^2 - \frac{7100}{50}}$$

$$= \sqrt{1 - 142} = 11.9 \text{ وهي نفس القيمة السابقة}$$

3- حساب الانحراف المعياري بطريقة الانحرافات المختصرة :

في حالة التوزيعات المنتظمة ذات أطوال الفئات المتساوية يمكن

استخدام الانحرافات المختصرة وذلك بقسمة انحرافات القيم عن الوسط

الفرضي على طول الفئة (ل) . ويمكن الحصول على الانحراف المعياري

من الصيغة التالية :

$$ع = \sqrt{\frac{\sum \frac{مجم ح ك^2}{مجم ك} - \frac{(\sum ح ك)^2}{مجم ك}}$$

حيث ل : طول الفئة

$$\bar{ح} = \frac{\sum ح}{ل} ، ح = س - و$$

مثال : احسب الانحراف المعياري بطريقة الانحرافات المختصرة

من بيانات المثال السابق :

الحل :

| ف | ك | س | ح | ح | ح ك | ح ² ك |
|---------|----|-----|-----|----|-----|------------------|
| -90 | 3 | 95 | 20- | 2- | 6- | 12 |
| -100 | 14 | 105 | 10- | 1- | 14- | 14 |
| -110 | 16 | 115 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -120 | 11 | 125 | 10 | 1 | 11 | 11 |
| -130 | 4 | 135 | 20 | 2 | 8 | 16 |
| 140 | 2 | 145 | 30 | 3 | 6 | 18 |
| المجموع | 50 | | | | 5 | 71 |

$$ع = \sqrt{\left(\frac{50}{50} \right) - \frac{71}{50}} \times 10$$

$$= 10 \times \sqrt{1.41} = 11.9 \text{ تقريباً وهي نفس القيمة السابقة}$$

خامساً : معامل الاختلاف Coefficient of Variation

وهو مقياس إحصائي وصفى يستخدم للحكم على مدى التشتت بين مجموعتين انحرافهما المعياري متساوى . ويطلق على معامل الاختلاف اسم مقياس التشتت النسبي ويستخدم أيضاً فى المقارنة بين نتائج ظاهرتين خاصة إذا كان التمييز بينهما مختلف .

ويتم استخدام أى من القوانين التالية فى حساب معامل الاختلاف :

$$(1) \text{ معامل الاختلاف} = 100 \times \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابي}}$$

أو

$$(2) \text{ معامل الاختلاف} = 100 \times \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابي}}$$

أو

$$(3) \text{ معامل الاختلاف} = 100 \times \frac{\text{نصف المدى الربيعي}}{\text{متوسط الربيعين}}$$

$$100 \times \frac{1J - 3J}{1J - 3J} =$$

ملحوظة : من فوائد معامل الاختلاف أنه يستخدم فى المقارنة بين تشتت توزيعين أو أكثر إذا كان كل منهما مقاس بوحدة تختلف عن وحدات قياس الآخر لأنه مقياس نسبي لا يميز كما هو الحال فى

مقاييس التشتت الأخرى حيث تكون مميزة بنفس وحدات التمييز الأصلية .

مثال : احسب معامل الاختلاف من جدول التوزيع التكرارى للمثال السابق .

الحل :

$$\text{.. معامل الاختلاف} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابي}} \times 100$$

الانحراف المعياري = 11.9 من المثال السابق

$$\text{الوسط الحسابي} = \bar{و} + \frac{\text{مجموع ك}}{\text{مجموع ل}} \times \text{ل}$$

$$116 = 10 \times \frac{5}{50} + 115 =$$

$$\therefore \text{معامل الاختلاف} = 100 \times \frac{11.9}{116} = 10.26 \% \text{ تقريباً}$$

مثال : أيهما أقل تشتت من المجموعتين (1) ، (2) حيث

مجموعة (1) : 12 , 10 , 8

مجموعة (2) : 102 , 100 , 98

$$\text{الحل : } \bar{س}_1 = \frac{12 + 10 + 8}{3} = 10$$

$$100 = \frac{98 + 100 + 102}{3} = \overline{100} \text{ س2}$$

$$\sqrt{2 \left(\frac{\text{مجدس}}{ن} \right) - \frac{\text{مجدس}^2}{ن}} = 1 \text{ ع1}$$

$$1.63 = \sqrt{2 \left(\frac{30}{3} \right) - \frac{308}{3}} =$$

$$1.63 = \sqrt{2 \left(\frac{30}{3} \right) - \frac{3008}{3}} = 2 \text{ ع2}$$

$$\%16.3 = 100 \times \frac{1.63}{10} = 1 \text{ خ}$$

$$\%1.63 = 100 \times \frac{1.63}{10} = 2 \text{ خ}$$

∴ يلاحظ أن بيانات المجموعة (2) أقل تشتتاً من بيانات المجموعة (1) بالرغم من تساويهما في الانحراف المعياري .

تمارين

(1) أوجد المدى والانحراف المتوسط والانحراف المعياري للقيم التالية :

5 , 8 , 11 , 14 , 22

(2) احسب الانحراف المتوسط والانحراف المعياري ومعامل الاختلاف من

جدول التوزيع التكراري التالي .

| الفئات | -30 | -40 | -50 | -60 | 80-70 | المجموع |
|---------|-----|-----|-----|-----|-------|---------|
| التكرار | 9 | 22 | 36 | 25 | 8 | 100 |

(3) فيما يلي التوزيع التكراري لدرجة 100 طالب في مادة الإحصاء .

| الفئات | -50 | -60 | -70 | -80 | 100-90 | المجموع |
|---------|-----|-----|-----|-----|--------|---------|
| التكرار | 3 | 10 | 18 | 40 | 29 | 100 |

والمطلوب إيجاد :

1- الربيع الأدنى والربيع الأعلى حسابياً وبيانياً .

2- معامل الاختلاف بطريقتين مختلفتين .

(4) احسب الانحراف المعياري والانحراف المتوسط من بيانات جدول

التوزيع التكراري للتمرين السابق .

(5) فيما يلي إنتاجية مساحات مختلفة من القطن والكتان موزعة في

شكل جدول توزيع تكراري كالاتي :

| المسافة بالأفدنة | -30 | -40 | -50 | -60 | -70 | 90-80 |
|--------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-------|
| إنتاج القطن بالطن | 8 | 16 | 20 | 24 | 20 | 12 |
| إنتاج الكتان بالطن | 4 | 8 | 10 | 12 | 10 | 6 |

والمطلوب مقارنة تشتت الإنتاجية لكل من محصولي القطن والكتان .

(6) من الجدول التكرارى التالى

| | | | | | | | |
|---------|----|----|-----|-----|-----|-----|-------|
| الفئات | -4 | -8 | -12 | -16 | -20 | -24 | 32-28 |
| التكرار | 2 | 3 | 20 | 40 | 20 | 10 | 50 |

والمطلوب : إيجاد مقياس للتشتت ومعامل الاختلاف .

(7) أوجد نصف المدى الربيعى والمنوال حسابياً وبيانياً من جدول التوزيع التكرارى للتمرين رقم (6) .

(8) أظهرت نتيجة امتحان طلبة الفرقة الثالثة كلية الآداب فى مادة الإحصاء ومادة الاجتماع عن الآتى .

| الإحصاء | الاجتماع |
|--------------------------------|----------|
| الوسط الحسابى لدرجة الطلاب | 84 |
| الانحراف المعياري لدرجة الطلاب | 7 |
| | 68 |
| | 17 |

والمطلوب مقارنة تشتت الدرجات فى مادتى الإحصاء والاجتماع .

(9) إذا كان متوسط أجر المرأة العاملة فى أحد المصانع هو 300 دينار شهرياً بانحراف معيارى قدره 18 دينار ومتوسط أجر الرجل فى نفس المصنع 400 دينار شهرياً بانحراف معيارى قدره 15 دينار ،
وضح أيهما أكثر تشتت أجر المرأة أم أجر الرجل .

الفصل الخامس

الارتباط *Correlation*

تمهيد:

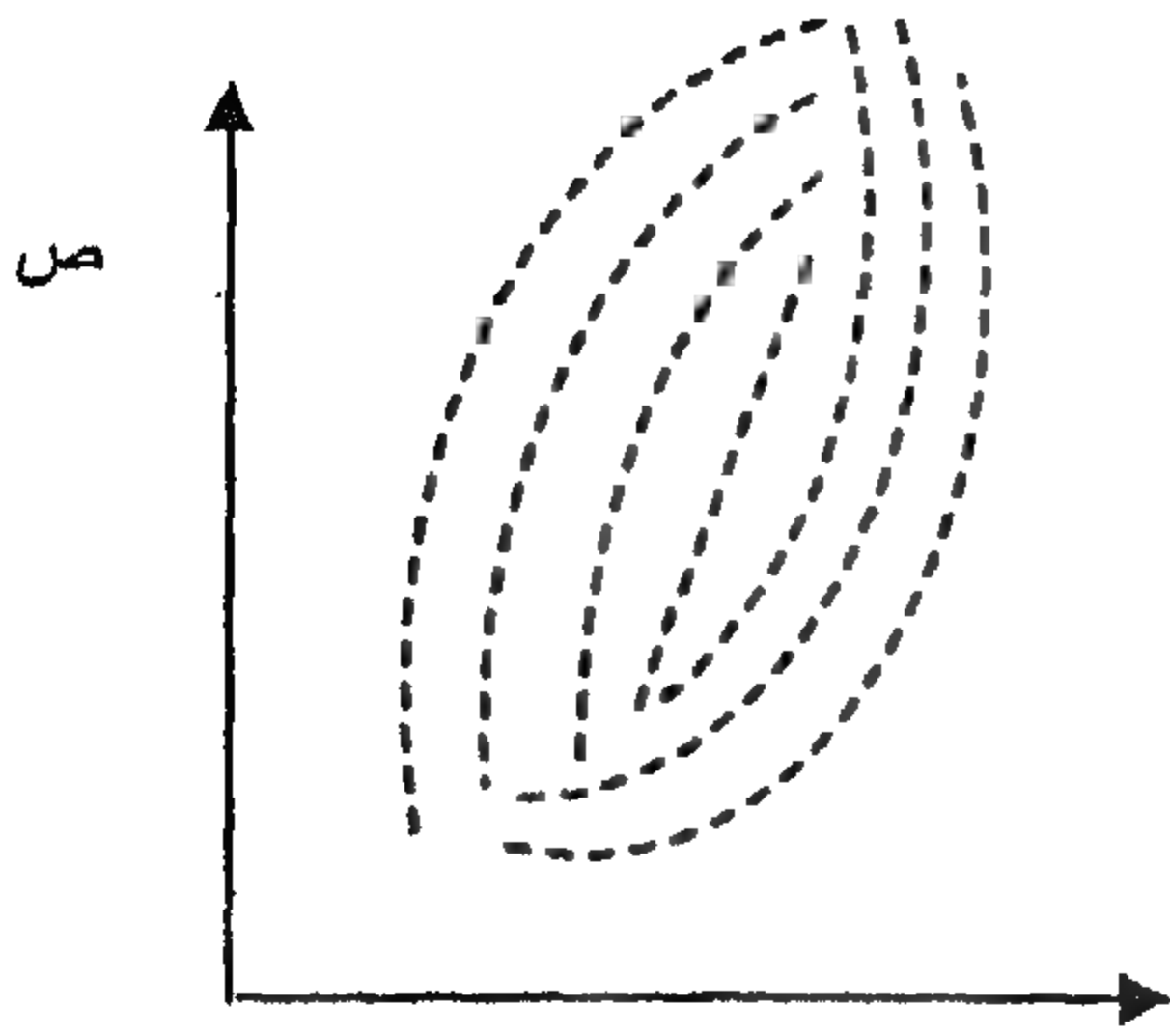
مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت السابق ذكرها من المقاييس الإحصائية التي تصف متغيراً واحداً ، بينما يختص الارتباط بقياس العلاقة بين متغيرين ويتم قياس هذه العلاقة من خلال مقياس يطلق عليه معامل الارتباط Correlation Coefficient .

ونتيجة معامل الارتباط تحدد قوة واتجاه العلاقة بين المتغيرين موضع الدراسة فإذا كانت إشارة معامل الارتباط موجبة دل ذلك على العلاقة الطردية بين المتغيرين بمعنى أن زيادة أحد المتغيرين يؤدي إلى زيادة المتغير الآخر . بينما إذا كانت إشارة معامل الارتباط سالبة دل ذلك على العلاقة العكسية بين المتغيرين بمعنى أن زيادة أحد المتغيرين تؤدي إلى نقص المتغير الآخر .

وتنحصر قيمة معامل الارتباط بين ± 1 فإذا رمزنا لمعامل الارتباط بالرمز r فإن r لها الدرجات التالية :

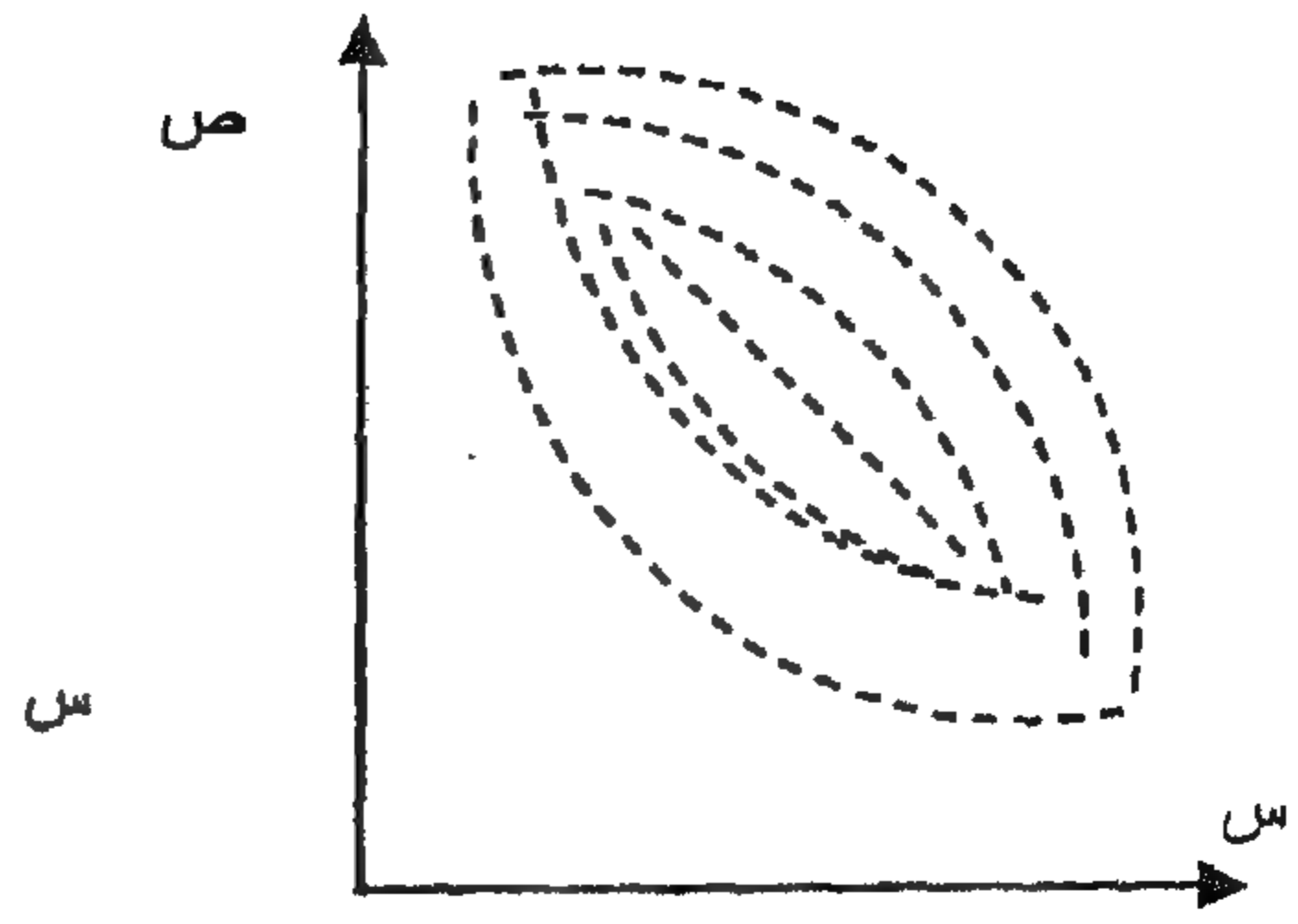
- (1) $r = \pm 1$ يوجد ارتباط تام طردى أو عكس
- (2) $0.7 < r < 1$ يوجد ارتباط قوى طردى أو عكس
- (3) $0.4 < r < 0.7$ يوجد ارتباط وسط طردى أو عكس
- (4) $0 < r < 0.7$ يوجد ارتباط ضعيف طردى أو عكس
- (5) $r = 0$ صفر لا يوجد ارتباط بين المتغيرين .

ويمكن الاستعانة بالتمثيل البيانى لقيم المتغيرين موضع الدراسة لاستخدام شكل الانتشار لمعرفة اتجاه العلاقة بينهما كما يتضح من الأشكال البيانية التالية :



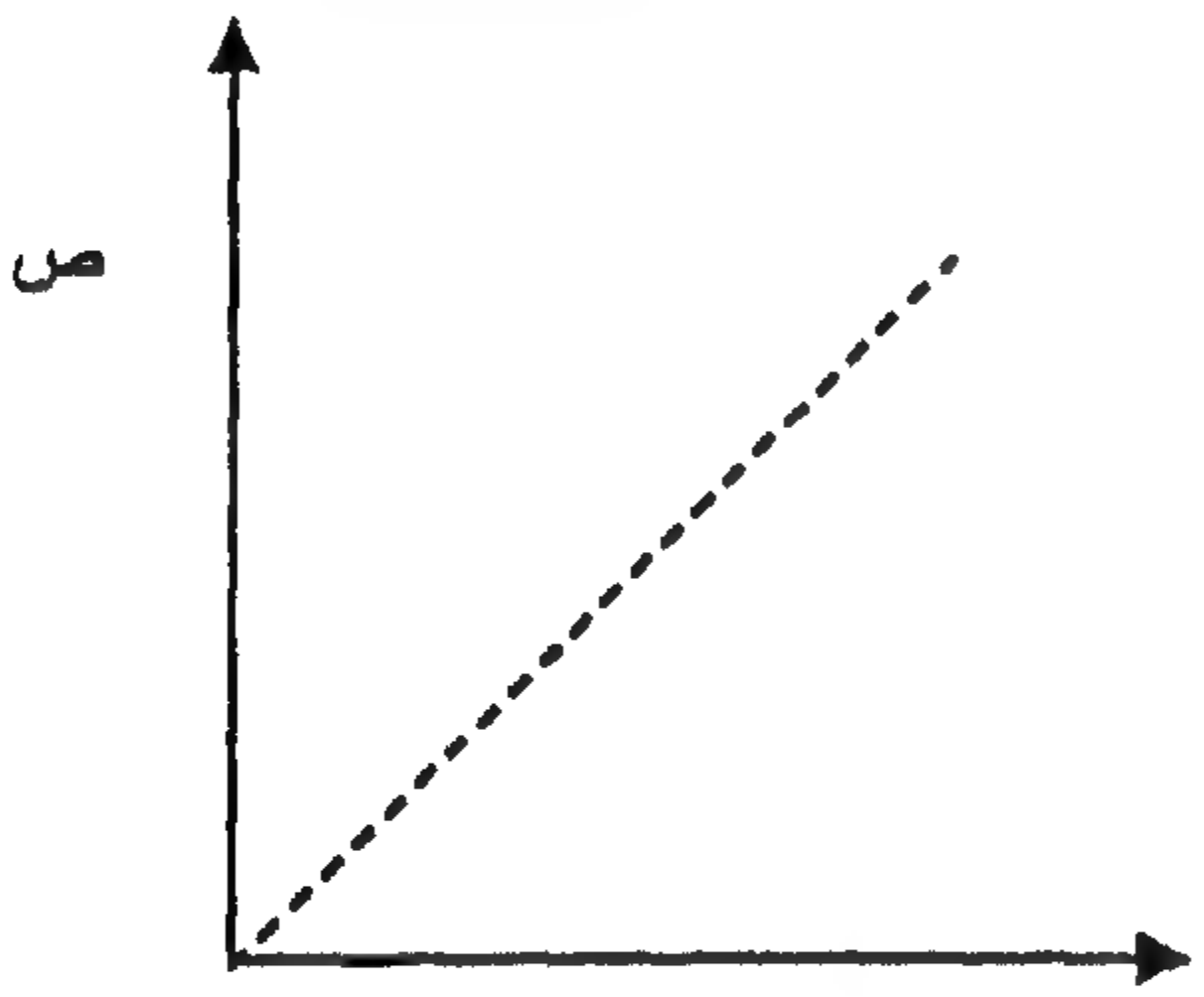
علاقة طردية بين قيم س ، ص

ومعامل الارتباط يأخذ قيمة موجبة



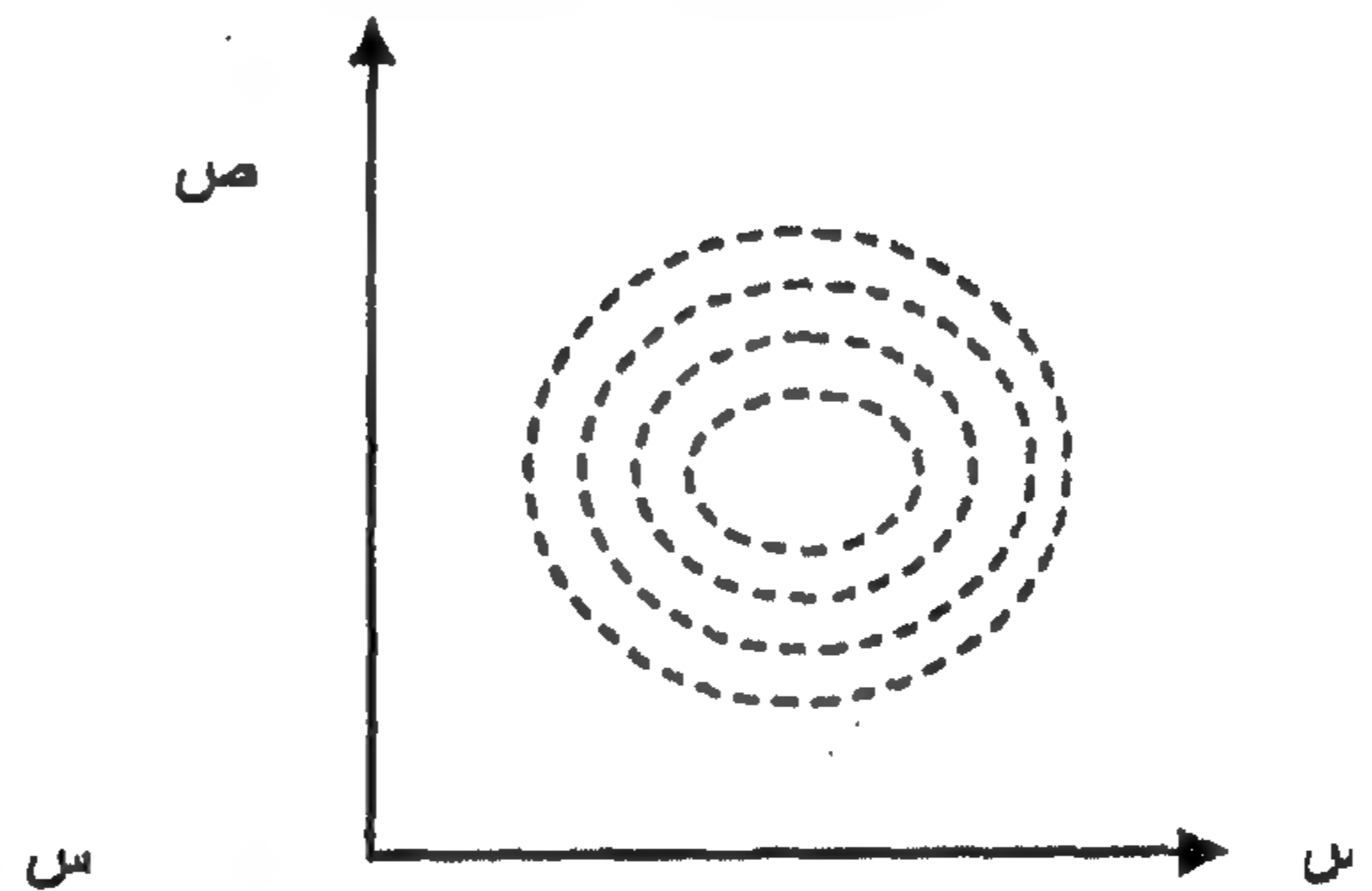
علاقة عكسية بين قيم س ، ص

ومعامل الارتباط يأخذ قيمة سالبة



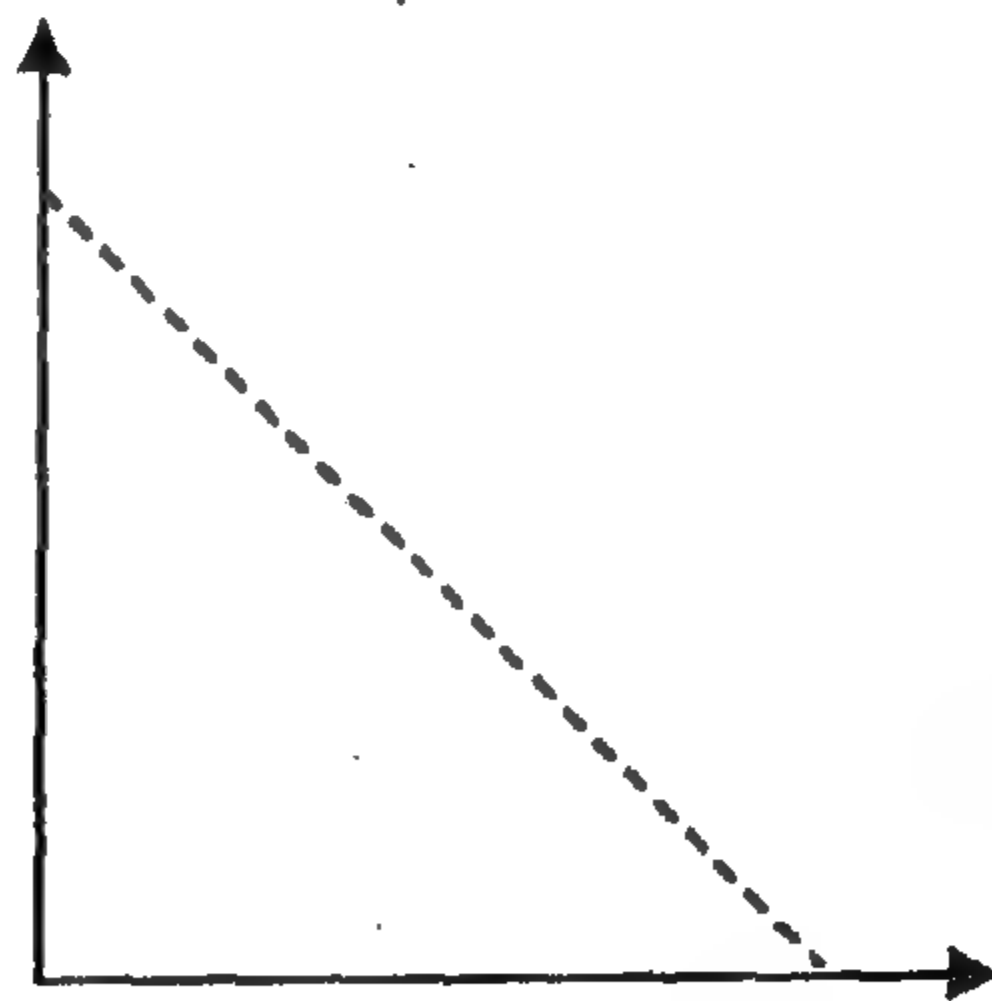
علاقة طردية تامة بين قيم س ، ص

ومعامل الارتباط يأخذ قيمة الواحد



عدم وجود ارتباط بين قيم س ، ص

ومعامل الارتباط يأخذ قيمة صفر



علاقة عكسية تامة بين قيم س ، ص

وقيمة معامل الارتباط -1

خصائص معامل الارتباط :

1- إذا أضيف أو طرح مقدار ثابت من قيم المتغيرين س ، ص المراد تقدير معامل الارتباط لهما فإن ذلك لا يؤثر على حساب معامل الارتباط وتستخدم هذه الخاصية فى استخدام الطرق المختزلة لحساب معامل الارتباط .

2- إذا تم ضرب أو قسمة قيم المتغيرين س ، ص فى مقدار ثابت فإن ذلك لا يؤثر أيضاً على معامل الارتباط .

حساب معامل الارتباط الخطى (بيرسون) :

يستخدم معامل الارتباط لقياس العلاقة بين الظواهر الكمية كما فى التالى :

(1) حساب معامل الارتباط للقيم المطلقة :

إذا فرض أن لدينا قيم المتغيرين س ، ص فإنه يمكن قياس الارتباط بينهما وفقاً لمعامل ارتباط بيرسون نسبة إلى العالم بيرسون

$$\text{حيث } r = \frac{\text{مجم س ص} - \text{س ص}}{n}$$

$$\text{حيث } r = \sqrt{\frac{\text{مجم س}^2}{n} - \left(\frac{\text{مجم س}}{n} \right)^2}$$

الانحراف المعياري لقيم س

$$\text{حيث } r_{ص} = \sqrt{\frac{\text{مجم ص}^2}{ن} - \left(\frac{\text{مجم ص}}{ن} \right)^2}$$
 الانحراف المعياري لقيم ص

كما يمكن حساب معامل الارتباط وفقاً للصيغ التالية:

(2) طريقة الانحرافات البسيطة : وتستخدم الصيغة التالية لحساب (ر)

$$r = \frac{ن \text{ مجم ح ص} - (\text{مجم ح ص}) (\text{مجم ص})}{\sqrt{[ن \text{ مجم ح}^2 - (\text{مجم ح})^2] [ن \text{ مجم ص}^2 - (\text{مجم ص})^2]}}$$

حيث ح تمثل انحراف قيم س عن الوسط الفرضي (أ) = س - أ

ح تمثل انحراف قيم ص عن الوسط الفرضي (ب) = ص - ب

(3) طريقة الانحرافات المختصرة :

يمكن الحصول على الصيغة المختصرة وذلك بقسمة ح على

عامل مشترك وكذلك ح وتستخدم العلاقة التالية لحساب قيمة (ر) :

$$r = \frac{ن \text{ مجم ح ص} - (\text{مجم ح ص}) (\text{مجم ح})}{\sqrt{[ن \text{ مجم ح}^2 - (\text{مجم ح})^2] [ن \text{ مجم ح ص}^2 - (\text{مجم ح ص})^2]}}$$

مثال : أوجد معامل الارتباط بين المتغيرين س ، ص

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|----|
| س | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| ص | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 |

الحل :

| ص | ص | ص | ص | ص | ص |
|-----|----|-----|----|----|---------|
| 9 | 1 | 3 | 3 | 1 | |
| 25 | 4 | 10 | 5 | 2 | |
| 49 | 9 | 21 | 7 | 3 | |
| 81 | 16 | 36 | 9 | 4 | |
| 121 | 25 | 55 | 11 | 5 | |
| 285 | 55 | 125 | 35 | 15 | المجموع |

ن مج ص ص - (مج ص) (مج ص)

$$= r \dots$$

$$\sqrt{\frac{(n \text{ مج ص}^2 - (\text{مج ص})^2)(n \text{ مج ص}^2 - (\text{مج ص})^2)}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{[(n \text{ مج ص}^2 - (\text{مج ص})^2)]^2}{n}}$$

$$\therefore r = \sqrt{[(35)^2 - 285 \times 5][(15)^2 - 55 \times 5]}$$

$$1 = \frac{100}{10000} = \frac{100}{200 \times 50}$$

∴ يوجد ارتباط طردى تام بين قيم المتغيرين ص ، ص

ثانيا : طريقة الانحرافات :

باستخدام الانحرافات حول الوسط الفرضي

| س | ص | حس | حص | ح ² ص | ح ² س | ح ² صس |
|---------|----|----|-----|------------------|------------------|-------------------|
| 1 | 3 | 2- | 4- | 8 | 4 | 16 |
| 2 | 5 | 1- | 2- | 2 | 1 | 4 |
| 3 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 9 | 1 | 2 | 2 | 1 | 4 |
| 5 | 11 | 2 | 4 | 8 | 4 | 16 |
| المجموع | 15 | 35 | صفر | 20 | 10 | 40 |

ن مج ح ح ص - (مج ح ص) (مج ح ص)

$$r = \frac{\sqrt{\frac{n \text{ مج ح ص}^2 - (\text{مج ح ص})^2}{n \text{ مج ح ص}^2 - (\text{مج ح ص})^2}}}{\sqrt{\frac{n \text{ مج ح ص}^2 - (\text{مج ح ص})^2}{n \text{ مج ح ص}^2 - (\text{مج ح ص})^2}}}$$

$$= \frac{20 \times 5 - \text{صفر} \times \text{صفر}}{\sqrt{(10 \times 5 - \text{صفر}) (40 \times 5 - \text{صفر})}}$$

$$= \frac{100}{100} = \frac{100}{200 \times 50} = 1 \text{ طردى تام}$$

وهى نفس النتيجة السابقة التى حصلنا عليها مع ملاحظة تقليل العمليات الحسابية ، ولذلك يفضل استخدام هذه الطريقة لتسهيل العمل الحسابى وتقليل الوقت اللازم لحساب معامل الارتباط .
معامل ارتباط الرتب (سبيرمان) :

يستخدم هذا المعامل لقياس العلاقة الارتباطية بين المتغيرات النوعية غير القابلة للقياس الكمى مثل العلاقة بين تقديرات الطلبة فى

المواد التى يقومون بدراستها . ويعتبر هذا المعامل من الطرق الإحصائية المهمة فى قياس العلاقة بين متغيرين رئيسيين وبصفة خاصة عندما يكون حجم العينة صغيراً ولا يزيد عن 30 مفردة وتعتمد هذه الطريقة على إعطاء المتغيرات رتب محل القياس العددي وباستخدام الفروق بين رتب المتغيرين يمكن إيجاد العلاقة الارتباطية بينهما من خلال صيغة معامل ارتباط الرتب (سبيرمان) .

وتمتاز هذه الطريقة عن طريقة بيرسون بالسهولة فى الحساب بالإضافة إلى إمكانية استخدامها فى حالة المتغيرات الكمية وتعتمد هذه الطريقة على الترتيب التنازلى أو التصاعدي لقيم الظاهرتين .

ويمكن تلخيص خطوات إيجاد معامل ارتباط الرتب (سبيرمان)

فى الآتى:

- 1- نضع فى العمودين الأول والثانى قيم الظاهرتين س، ص والتى غالباً ما تكون فى صورة تقديرات الطلبة فى الامتحانات أو قد تكون فى صورة قيم مطلقة .
- 2- نجئ فى الهامش ويتم ترتيب التقديرات الخاصة بالعمودين الأول والثانى تصاعدياً أو تنازلياً ونعطى كل تقدير رتبه .
- 3- ننقل من الهامش الرتب المعطاة لكل تقدير ونضعها فى العمود الثالث والرابع كل تقدير وفق رتبته مع مراعاة كتابة التقديرات فى العمود الأول والثانى بنفس ترتيبها فى المسألة المراد إيجاد معامل ارتباط الرتب لها .
- 4- نكون عمود خامس للفرق بين رتب العمود (3) ، العمود (4) .
- 5- نربع قيم العمود الخامس لنحصل على $\sum D^2$.

6- نوجد معامل ارتباط الرتب من العلاقة .

$$r = \frac{6 \text{ مج ف}^2}{n(n^2 - 1)} - 1$$

حيث ن عدد الرتب

ويلاحظ أنه كلما صغرت قيمة ف² تدل أن العلاقة قوية وطرديه والعكس صحيح .

وعندما يكون الناتج

$$1 < \frac{6 \text{ مج ف}^2}{n(n^2 - 1)}$$

يدل ذلك على أن العلاقة عكسية بين المتغيرين .

مثال : فيما يلي تقديرات 6 من الطلبة في امتحان مادتي الاقتصاد والرياضة والمطلوب حساب معامل الارتباط (سبيرمان) بين تقديرات المادتين.

| | | | | | | |
|----------|-------|-------|-------|-------|-----------|-----------|
| الاقتصاد | ممتاز | جيد | ضعيف | مقبول | ضعيف جداً | جيد جداً |
| الرياضة | جيد | مقبول | ممتاز | ضعيف | جيد جداً | ضعيف جداً |

الحل : نرتب تقديرات كل من المادتين ترتيب تصاعدي أو تنازلي وذلك بإعطاء التقدير ممتاز (رتبة 1) والتقدير جيد جداً (رتبة 2) والتقدير جيد (رتبة 3) والتقدير مقبول (رتبة 4) والتقدير ضعيف (رتبة 5) والتقدير ضعيف جداً (رتبة 6) . ثم نحسب الفروق بين رتب التقديرات أي الفرق بين كل رتبتين متناظرتين ثم نربع الفروق كما في الجدول التالي :

| الاقتصاد | الرياضة | رتب الاقتصاد | رتب الرياضة | ف | ف ² |
|-----------|-----------|--------------|-------------|-----|----------------|
| ممتاز | جيد | 1 | 3 | 2- | 4 |
| جيد | مقبول | 3 | 4 | 1- | 1 |
| ضعيف | ممتاز | 5 | 1 | 4+ | 16 |
| مقبول | ضعيف | 4 | 5 | 1- | 1 |
| ضعيف جداً | جيد جداً | 6 | 2 | 4+ | 16 |
| جيد جداً | ضعيف جداً | 2 | 6 | 4- | 16 |
| المجموع | | | | صفر | 54 |

$$r = 1 - \frac{6 \sum f^2}{n(n^2 - 1)}$$

$$r = 1 - \frac{54 \times 6}{6(36 - 1)} = -0.54$$

وهذا يعنى أن هناك علاقة عكسية وسط بين تقديرات مادتي الاقتصاد والرياضة .

حساب معامل الارتباط (سبيرمان) في حالة الرتب المكررة :

في حالة الرتب المكرر نقوم بإعطاء المقيم المتكررة رتباً تساوى متوسط الرتب التي كانت لتعطى لو لم تتكرر التقديرات ، والمثال التالي يوضح ذلك .

مثال : أوجد معامل الارتباط (سبيرمان) لتقديرات 10 من الطلاب في مادتي الرياضة والإحصاء.

| | | | | | | | | | | |
|-------|------|-------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---------|
| ممتاز | جيد | مقبول | جدا ضعيف | ضعيف | مقبول | جيد | ممتاز | جيد | مقبول | الرياضة |
| جدا | ضعيف | جدا | ضعيف | مقبول | جيد | مقبول | جدا | ممتاز | جدا | الإحصاء |

الحل : نكون جدول الحل

| رقم الطالب | الرياضة | الإحصاء | رتب الرياضة | رتب الإحصاء | ف | ف ² |
|------------|----------|----------|-------------|-------------|------|----------------|
| 1 | مقبول | جيد | 7 | 4 | 3 | 9 |
| 2 | جيد | ممتاز | 4 | 1 | 3 | 9 |
| 3 | ممتاز | جيد جدا | 1.5 | 2 | 0.5- | .25 |
| 4 | جيد | مقبول | 4 | 6.5 | 2.5- | 6.25 |
| 5 | مقبول | جيد | 7 | 4 | 3 | 9 |
| 6 | ضعيف | مقبول | 9 | 6.5 | 2.5 | 6.25 |
| 7 | ضعيف جدا | ضعيف | 10 | 8.5 | 1.5 | 2.25 |
| 8 | مقبول | ضعيف جدا | 7 | 10 | 3- | 9 |
| 9 | جيد | ضعيف | 4 | 8.5 | 4.5- | 20.25 |
| 10 | ممتاز | جيد | 1.5 | 4 | 2.5- | 6.25 |
| المجموع | | | | | صفر | 77.50 |

$$r = \frac{6 \text{ مج ف}^2}{n(n-1)} - 1$$

$$r = \frac{77.5 \times 6}{(10-1)10} - 1$$

$$= \frac{465}{990}$$

$$= 0.47 - 1 = 0.53$$

∴ يوجد ارتباط طردى وسط بين مادتي الرياضة والإحصاء .

ملحوظة:

عند إعطاء رتب لتقديرات مادة الرياضة نجد أن الطالب رقم (3) الذي يستحق الرتبة (1) والطالب رقم (10) الذي يستحق الرتبة (2) حاصلان على تقدير ممتاز ولذلك يستحق كل منهم متوسط الرتبة وهو $1 + 2 / 2 = 1.5$ ، والطالب رقم (2) في هذه المادة ورقم (4) ورقم (9) يستحقون الرتب الثالث والرابع والخامس ولهم نفس التقدير ونظراً لتساويهم في التقدير فيعطى كل منهم متوسط هذه الرتب وهو $4 + 5 / 2 = 4.5$ ، والطالب رقم (1) ، (5) ، (8) لهم نفس التقدير ويستحقون الرتب (6) ، (7) ، (8) ونظراً لتساويهم في التقدير فيعطى كل منهم متوسط هذه الرتب وهو $6 + 7 + 8 / 3 = 7$ ، والطالب رقم (6) يستحق الرتبة (9) والطالب رقم (7) يستحق الرتبة (10) .

وبإتباع نفس الطريقة عند إعطاء رتب لتقدير مادة الإحصاء يمكن أن نحسب الفروق كما في الجدول السابق .

حساب معامل الارتباط (سبيرمان) في حالة البيانات الكمية :

كما ذكر سابقاً لا يقتصر استخدام معامل ارتباط سبيرمان على المتغيرات النوعية فقط بل يستخدم في حالة المتغيرات الكمية أيضاً وذلك كما يتضح من المثال التالي :

مثال : احسب معامل ارتباط سبيرمان بين قيمة المتغيرين (س ، ص) .

| | | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|----|
| س | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 |
| ص | 13 | 16 | 18 | 20 | 31 | 42 |

الحل : نكون جدول الحل التالي :

| س | ص | رتب س | رتب ص | ف | ف ² |
|---------|----|-------|-------|-----|----------------|
| 25 | 13 | 1 | 1 | صفر | صفر |
| 30 | 16 | 2 | 2 | صفر | صفر |
| 35 | 18 | 3 | 3 | صفر | صفر |
| 40 | 20 | 4 | 4 | صفر | صفر |
| 45 | 31 | 5 | 5 | صفر | صفر |
| 50 | 42 | 6 | 6 | صفر | صفر |
| المجموع | | | | صفر | صفر |

$$r = 1 - \frac{6 \text{ مج ف}^2}{n(n^2 - 1)}$$

$$r = 1 - \frac{6 \times \text{صفر}}{6(1 \times 36)}$$

أى أن الارتباط طردى تام بين قيم المتغيرين س ، ص .

اختبار معنوية معامل الارتباط :

يستعمل اختبار (ت) للكشف عن معنوية معامل الارتباط (ر) وذلك وفقاً

للصيغة التالية :

$$t_r = \frac{r \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

حيث ن : عدد المفردات ، r^2 = مربع معامل الارتباط

مثال : فى دراسة العلاقة بين عمر نبات الفول بالأسبوع وطول النبات بالسنتيمتر حصل الباحث على النتائج التالية :

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|---|-----------|
| 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | العمر (س) |
| 40 | 38 | 33 | 23 | 16 | 13 | 5 | الطول (ص) |

والمطلوب حساب معامل الارتباط واختبار معنويته

الحل : معامل الارتباط (ر)

$$\frac{\text{مجم س ص} - \text{س ص}}{ن}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{\text{مجم س}^2}{ن} - \left(\frac{\text{مجم س}}{ن} \right)^2 \right] \left[\frac{\text{مجم ص}^2}{ن} - \left(\frac{\text{مجم ص}}{ن} \right)^2 \right]}$$

| س | ص | س ص | س ² | ص ² |
|---------|-----|-----|----------------|----------------|
| 1 | 5 | 5 | 1 | 25 |
| 2 | 13 | 26 | 4 | 169 |
| 3 | 16 | 48 | 9 | 256 |
| 4 | 23 | 92 | 16 | 589 |
| 5 | 33 | 165 | 25 | 1089 |
| 6 | 38 | 228 | 36 | 1444 |
| 7 | 40 | 280 | 49 | 1600 |
| 28 | 168 | 844 | 140 | 5112 |
| المجموع | | | | |

$$= \frac{844}{(24)(4)} - \frac{7}{7}$$

$$0.989 = \frac{\sqrt{\left[\frac{5112}{7} - \left(\frac{28}{7} \right)^2 \right] \left[\frac{140}{7} - \left(\frac{4}{7} \right)^2 \right]}}{\sqrt{\left[\frac{5112}{7} - \left(\frac{28}{7} \right)^2 \right] \left[\frac{140}{7} - \left(\frac{4}{7} \right)^2 \right]}} = r$$

ويعنى ذلك أنه يوجد ارتباط طردى قوى بين عمر النبات وطوله .

إختبار معنوية معامل الارتباط :

$$t_r = \frac{\sqrt{0.989} \sqrt{2-7}}{\sqrt{1-(0.989)^2}} = 226.02$$

وبمقارنة هذه القيمة بنظيرتها الجدوليه (ت 0.05) = 2.571 تبين
معنوية العلاقة بين عمر النبات وطوله .

تمارين

(1) أوجد معامل الارتباط بيرسون من بيانات الجدول التالي :

| | | | | | | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| س | 13 | 18 | 14 | 18 | 23 | 21 | 14 | 25 | 23 | 14 |
| ص | 10 | 16 | 12 | 18 | 17 | 17 | 9 | 19 | 17 | 11 |

ملحوظة : (مج س = 146 ، مج ص = 183 ، مج س ص = 804 ،

مج س² = 2254 ، مج ص² = 3529) .

(2) إذا علمت أن

مج س = 768 ، مج س ص = 63885 ، مج ص² = 68153 ، مج

س² = 60064 ، مج ص = 821 ، ن = 10 .

أوجد معامل ارتباط بيرسون .

(3) إذا علمت أن

س̄ = 43.5 ، مج س ص = 14438 ، مج س² = 24045 ،

ص̄ = 27.2 ، مج ص² = 68153 ، ن = 10 .

أوجد معامل ارتباط بيرسون .

(4) فيما يلي التقديرات التي حصل عليها 6 طلاب في مادتي الإحصاء

والرياضة والمطلوب حساب معامل الارتباط بين تقديرات هاتين

المادتين .

| الإحصاء | ممتاز | جيد | ضعيف | مقبول | جيد جداً | ضعيف جداً |
|---------|-------|-------|------|----------|-----------|-----------|
| الرياضة | ضعيف | مقبول | جيد | جيد جداً | ضعيف جداً | ممتاز |

(5) فيما يلى التقديرات التى حصل عليها 8 طلاب فى مادتى الإحصاء والاقتصاد المطلوب حساب معامل الارتباط بين تقديرات هاتين المادتين .

| | | | | | | | | |
|----------|-----------|-------|-------|----------|----------|-------|-----------|------|
| الإحصاء | ضعيف جداً | مقبول | مقبول | جيد | جيد جداً | ممتاز | مقبول | ضعيف |
| الاقتصاد | ضعيف | مقبول | ممتاز | جيد جداً | جيد | مقبول | ضعيف جداً | ضعيف |

(6) استخدم معامل ارتباط سبيرمان لحساب العلاقة الارتباطية بين قيم المتغيرين س ، ص .

| | | | | | |
|---|----|----|----|----|-----|
| س | 11 | 21 | 31 | 41 | 51 |
| ص | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 |

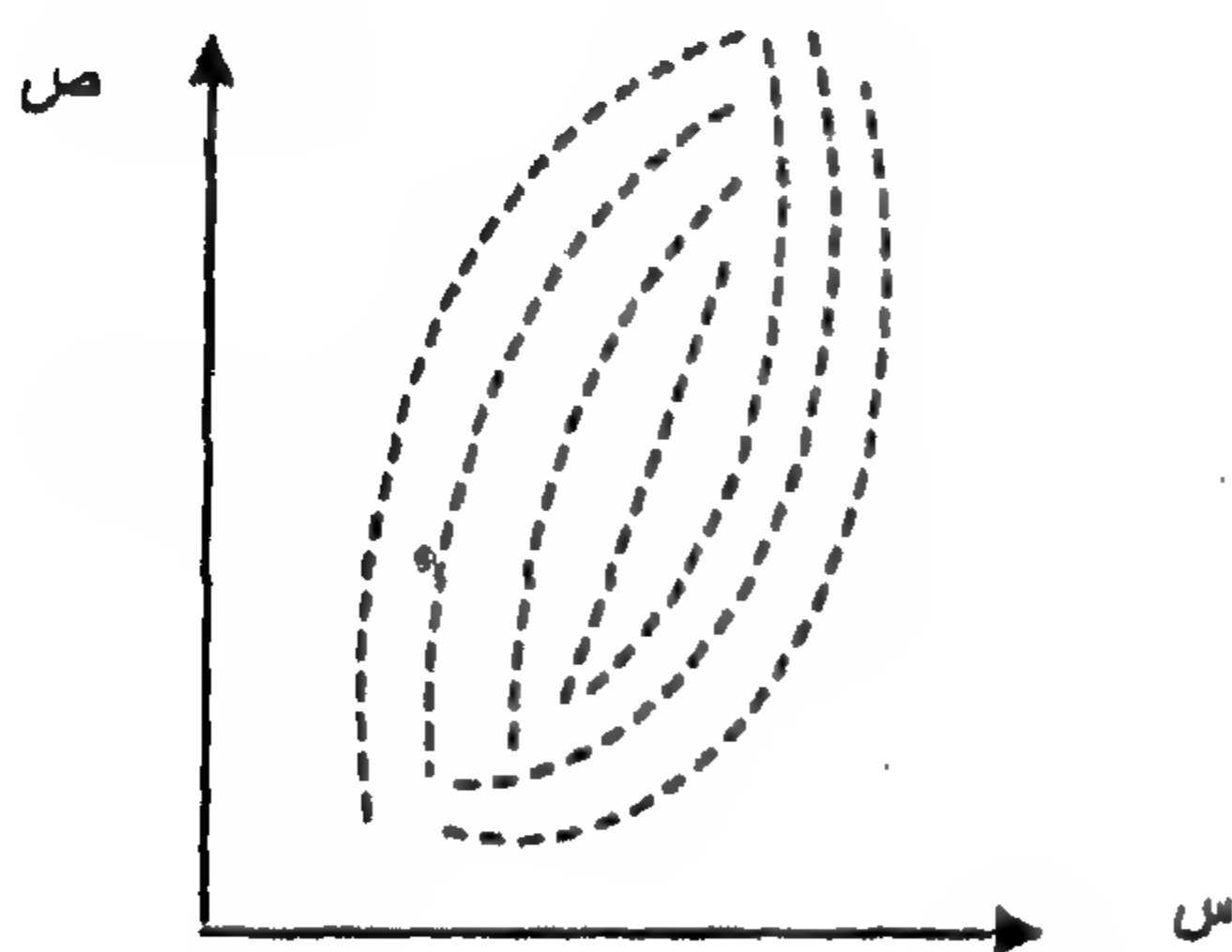
الفصل السادس

الانحدار *Regression*

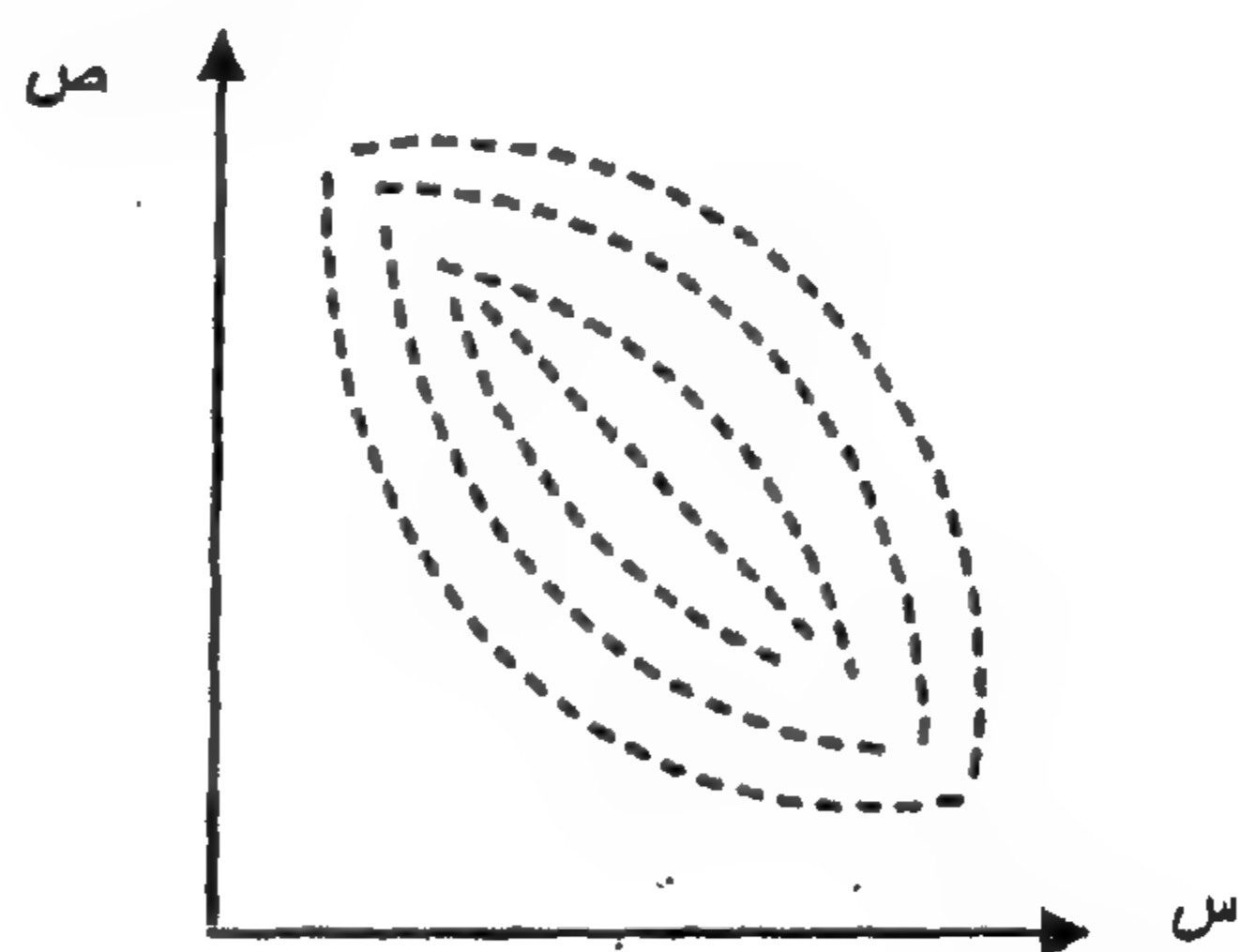
تمهيد :

يختص الانحدار بدراسة العلاقة بين متغيرين أو أكثر أحدهما متغير تابع **Dependent Variable** والآخر متغير مستقل **Independent Variable** (أو متغيرات مستقلة) فإذا كانت العلاقة بين متغيرين فقط أحدهما تابع والآخر مستقل سمي بالانحدار البسيط **Simple Regression** ، بينما إذا كانت العلاقة بين متغير تابع وأكثر من متغير مستقل سمي بالانحدار المتعدد **Multi Regression** ويمكن استخدام الانحدار في عملية التنبؤ **Prediction** الإحصائي بالمستقبل .

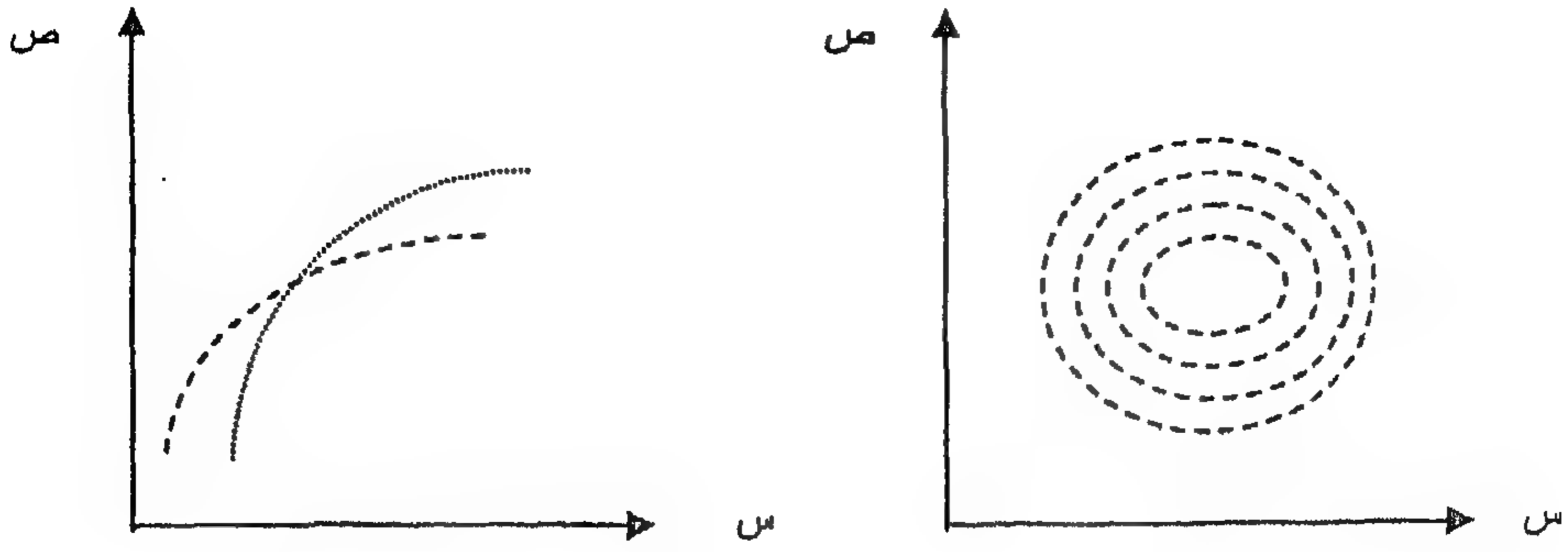
ويمكن من خلال شكل الانتشار **Scatter Diagram** بين قيم المتغير التابع وقيم المتغير المستقل تكوين فكرة مبدئية عن نوع العلاقة إذا كانت طردية أم عكسية أم لا توجد علاقة بين المتغيرين وذلك كما يتضح من الأشكال التالية :



علاقة طردية بين قيم س ، ص



علاقة عكسية بين قيم س ، ص



لا توجد علاقة بين قيم S ، V علاقة غير خطية بين قيم S ، V
 طريقة المربعات الصغرى لتوفيق الخط المستقيم :

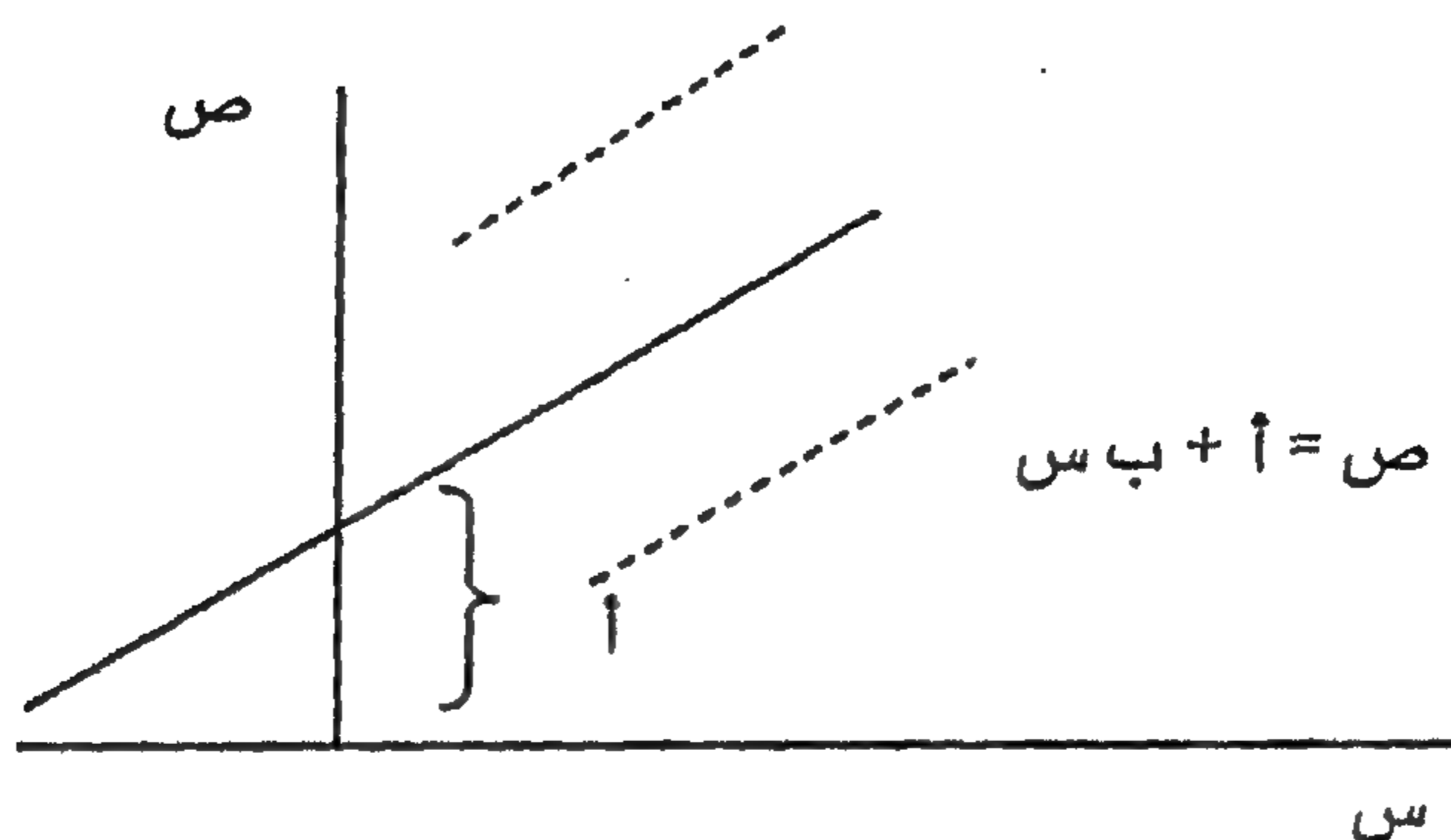
تعتبر طريقة المربعات الصغرى الطريقة الشائعة لتوفيق الخط المستقيم ، وتبنى هذه الطريقة على أساس توفيق خط لمجموعة من القيم بحيث يكون مجموع مربعات انحرافات قيم V عن الخط المستقيم المحسوب أقل ما يمكن ، أى مجموع الفروق بين القيم المشاهدة والقيم المتوقعة يساوى صفر ، وفى نفس الوقت يمكن التعبير عن الخط بمعادلة يحسب منها وهذا الخط يطلق عليه خط الانحدار. وخط الانحدار المطلوب توفيقه سوف لا يمر بجميع النقاط فى شكل الانتشار ولكن بعض هذه النقاط سوف يقع فوقه والبعض الآخر سوف يقع تحته وبالتالي إذا اخترنا أى قيمة للمتغيرين (S) وقدرنا قيمة (V) المناظرة لها من واقع معادلة هذا الخط (معادلة الانحدار) فإن قيمة (S) سوف تختلف عن قيمة (V) الفعلية فى حالة عدم انطباق النقطة على الخط تماماً ، وهذا الاختلاف يعطى لنا انحراف النقطة (البعد الرأسى لها) عن خط الانحدار .

معادلة إنحدار V على S

ولإيجاد معادلة الانحدار التى على الصورة

$$V = A + B S$$

حيث أ هو الجزء المقطوع من المحور الرأسى ، (ب) هى ميل خط الانحدار أو معامل الانحدار ص على س ويعرف بأنه التغير فى قيمة (ص) نتيجة التغير فى (س) بوحدة واحدة .



ويمكن الحصول على قيمتى أ ، ب من المعادلتين التاليتين :

$$\frac{\text{مجم } ص - \bar{ص} \bar{س}}{ن} = \frac{\text{مجم } ص - (\text{مجم } س) (\text{مجم } ص)}{ن} = \hat{ب}$$

$$\frac{\text{مجم } ص - \bar{ص} \bar{س}}{ن} = \frac{\text{مجم } ص - \left(\frac{\text{مجم } س}{ن} \right) \text{مجم } ص}{ن}$$

$$\hat{أ} = \bar{ص} - \hat{ب} \bar{س}$$

$$\frac{\text{مجم } ص}{ن} = \bar{ص} \quad , \quad \frac{\text{مجم } س}{ن} = \bar{س}$$

ن = عدد مفردات س أو ص

وتكون الصيغة الرياضية لمعادلة انحدار ص على س على الصورة

التالية :

$$\hat{ص} = \hat{أ} + \hat{ب} س \quad (1)$$

حيث V^{\wedge} : هي قيم V المقدرة في المشاهدة μ

S^{\wedge} : هي قيم S في المشاهدة μ

H : هي مشاهدات (S ، V) الزوجية

$\wedge B$: معامل الانحدار وهو يشير إلى مقدار التغير في قيمة (V) عندما تتغير (S) بوحدة واحدة، كما إنه يشير إلى ميل الخط المستقيم .

$\wedge A$: المعلمة الثابتة ويشير إلى الجزء المقطوع من محور (V) ويوضح أثر المتغيرات الأخرى خلاف (S) المؤثرة على (V) والتي لم تؤخذ في الاعتبار عند تقدير العلاقة الرياضية بين (S ، V) .

ويمكن استخدام معادلة الانحدار في التنبؤ بقيمة (V) عندما تأخذ (S) قيمة معينة، فإذا فرض أن دالة إنتاج محصول ما ممثلة بالعلاقة التالية :

$$V^{\wedge} = 2 + 3S^{\wedge}$$

حيث تعبر V^{\wedge} عن حجم الإنتاج المقدّر بالطن وأن (S) هي المورد الإنتاجي الممثل في الأسمدة . فإذا كانت كمية الأسمدة هي 60 وحدة فإنه يمكن تقدير حجم الإنتاج من المحصول استناداً إلى معادلة الانحدار أو دالة الإنتاج السابقة .

$$V^{\wedge} = 2 + 3 \times 60 = 182 \text{ وحدة}$$

وعلى ذلك يمكن تقدير حجم الإنتاج كلما اختلفت كمية السماد بنفس طريقة التقدير السابقة وذلك بالتعويض عن قيمة (س) فى معادلة الانحدار بما يقابلها من كمية السماد المعطاة .

خطوات حساب معامل الانحدار ب :

- 1- بالإضافة إلى عمودى أزواج المشاهدات س ، ص نكون عمودين آخرين هما عمود س ص ، عمود س² .
- 2- نحصل على مجموع الأربعة أعمدة .
- 3- نطبق القانون للحصول على قيمة ب .

معادلة انحدار س على ص :

هذه المعادلة تأخذ الصورة الرياضية التالية :

$$س^{\wedge} = ج + ع ص - (2)$$

ويمكن الحصول على ع ، ج كما يلى

$$ع = \frac{\frac{\sum س ص}{ن} - \frac{\sum س}{ن} \cdot \frac{\sum ص}{ن}}{\frac{\sum ص ص}{ن} - \left(\frac{\sum ص}{ن} \right)^2}$$

$$ج = س - ع ص$$

ويلاحظ إننا يمكن اشتقاق معادلة انحدار س على ص واشتقاق معامل الانحدار الخاص بها وكذلك الجزء الثابت ج من خلال تبديل (س) ب (ص) أو (ص) ب (س) فى المعادلة (1) لنحصل على المعادلة (2) .

مثال : أوجد معامل انحدار ص على س من بيانات الجدول التالي :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| س | 1 | 3 | 9 | 8 | 4 |
| ص | 2 | 6 | 8 | 5 | 4 |

الحل : نكون أعمدة الحل

| س | ص | س ص | س ² |
|---------|----|-----|----------------|
| 1 | 2 | 2 | 1 |
| 3 | 6 | 18 | 9 |
| 9 | 8 | 72 | 81 |
| 8 | 5 | 40 | 64 |
| 4 | 4 | 16 | 16 |
| المجموع | 25 | 148 | 171 |

$$\bar{س} = \frac{\text{مجموع س}}{ن} = \frac{25}{5} = 5, \quad \bar{ص} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\frac{\text{مجموع س ص} - \bar{س} \bar{ص}}{ن}$$

$$\hat{ب} = \frac{\text{مجموع س ص} - \bar{س} \bar{ص}}{\left[\frac{\text{مجموع س}^2}{ن} - \bar{س}^2 \right]}$$

$$0.5 = \frac{4.6}{9.2} = \frac{5 \times 5 - \frac{148}{5}}{\left[\frac{25}{5} \right] - \frac{171}{5}}$$

$$\hat{ا} = \bar{ص} - \bar{ب} \bar{س}$$

$$2.5 = 5 - 5 \times 0.5 =$$

∴ معادلة الانحدار هي

$$\hat{ص} = 0.5س + 2.5$$

ويمكن التنبؤ بقيمة (ص) عندما (س) يساوي 100 مثلاً وذلك من خلال التعويض في معادلة الانحدار عن قيمة س = 100 لنحصل على ص :

$$\hat{ص} = 0.5 \times 100 + 2.5 = 52.5$$

وأن 0.5 تعنى أنه إذا تغيرت (س) بمقدار وحدة واحدة فإن (ص) تتغير بمقدار 0.5 وحدة .

مثال : أوجد معادلة انحدار س على ص من البيانات الآتية :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| س | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| ص | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

الحل : نكون أعمدة الحل

| س | ص | س ص | ص ² |
|---------|----|-----|----------------|
| 1 | 5 | 5 | 25 |
| 2 | 4 | 8 | 16 |
| 3 | 3 | 9 | 9 |
| 4 | 2 | 8 | 4 |
| 5 | 1 | 5 | 1 |
| المجموع | 15 | 35 | 55 |

$$\frac{\sum س ص - \frac{\sum س \sum ص}{ن}}{ن}$$

$$= \frac{\sum ص^2 - \frac{(\sum ص)^2}{ن}}{ن}$$

$$1 - = \frac{9 - 7}{9 - 11} = \frac{3 \times 3 - \frac{35}{5}}{2\left(\frac{15}{5}\right) - \frac{55}{5}} =$$

ج = س - ع ص

$$6 = 3 \times (1 -) - 3 =$$

∴ معادلة الانحدار س على ص هي

$$\text{س}^{\wedge} = 6 - \text{ص}^{\wedge}$$

مثال : أوجد معادلة خط انحدار (ص على س) من بيانات الجدول التالي :

| | | | | | |
|---|----|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 1 | 2 | 3 | س |
| 8 | 10 | 5 | 8 | 9 | ص |

الحل : نكون أعمدة الحل

| س ² | س ص | ص | س | |
|----------------|-----|----|----|---------|
| 9 | 27 | 9 | 3 | |
| 4 | 16 | 8 | 2 | |
| 1 | 5 | 5 | 1 | |
| 9 | 30 | 10 | 3 | |
| 1 | 8 | 8 | 1 | |
| 24 | 86 | 40 | 10 | المجموع |

$$\bar{s} = \frac{10}{5} = 2, \quad \bar{ص} = \frac{40}{5} = 8$$

$$\hat{ب} = \frac{8 \times 2 - \frac{86}{5}}{\left(\frac{10}{5}\right)^2 - \frac{24}{5}} = 1.5 \text{ تقريباً}$$

$$\hat{ا} = \bar{ص} - \bar{ب} = 8 - 2 = 6$$

$$5 = 2 \times 1.5 - 8 =$$

∴ معادلة الانحدار هي

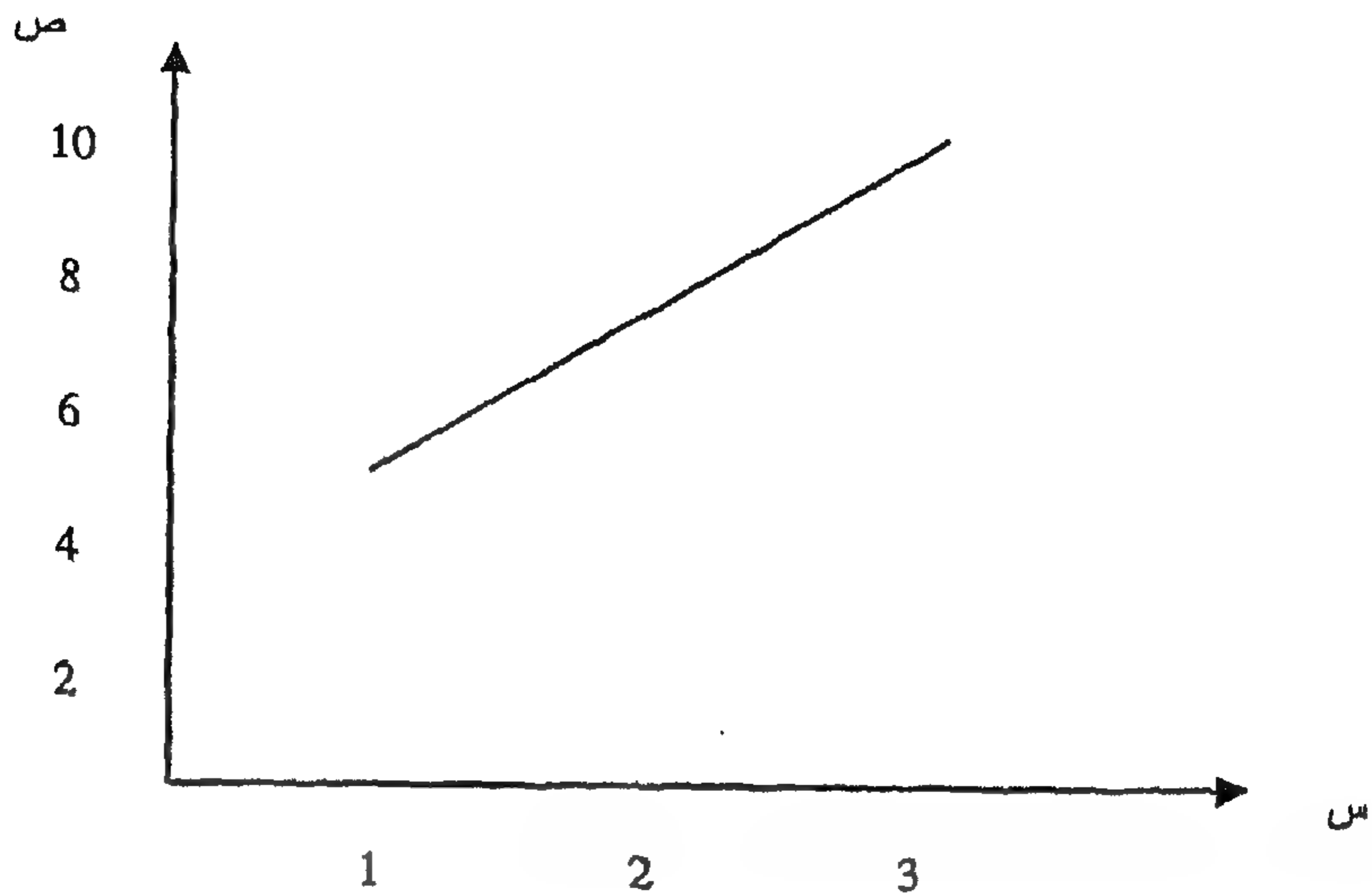
$$\hat{ص} = 1.5 + 5$$

ويمكن تقدير $\hat{ص}$ التقديرية المقابلة لقيم s الأصلية عند كل قيمة من قيم (s) كما يلي:

| قيم s | قيم $ص$ الأصلية | قيم $ص$ التقديرية |
|---------|-----------------|-------------------|
| 3 | 9 | 9.5 |
| 2 | 8 | 8 |
| 1 | 5 | 6.5 |
| 3 | 10 | 9.5 |
| 1 | 8 | 6.5 |

ويمكن الحصول بيانياً على الخط المستقيم الممثل لبيانات (s) ،

$(ص)$ وذلك بتوقيع أزواج قيم $(s, ص)$ بيانياً على الرسم كما يلي:



العلاقة بين معامل الارتباط ومعامل الانحدار :

يمكن إيجاد العلاقة بين معامل الانحدار ومعامل الارتباط من خلال العلاقات الرياضية التالية :

(1) حاصل ضرب معامل انحدار ص على س في معامل انحدار س على ص يساوي مربع معامل الارتباط .

فإذا فرضنا أن معامل انحدار ص على س هو \bar{b} ومعامل انحدار س على ص هو \bar{a} ومعامل الارتباط هو (ر) فإن

$$r^2 = \bar{b} \times \bar{a}$$

$$\therefore r = \sqrt{\bar{b} \times \bar{a}}$$

(2) حاصل ضرب (ب) معامل انحدار في ع / عر يساوي معامل الارتباط حيث (عر) الانحراف المعياري لقيم (س) ، (عر) الانحراف المعياري لقيم (ص)

$$r = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \times b \text{ ومنها}$$

$$b = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \times r$$

مثال : إذا علمت أن معادلة انحدار (ص) على (س) هي

$$\text{ص} = 0.75 + 3\text{س}$$

ومعادلة انحدار (س) على (ص) هي

$$\text{س} = 0.06 + 4\text{ص}$$

فأوجد معامل الارتباط

$$\text{الحل : } b = 0.75, \quad \bar{b} = 0.06$$

$$r = \sqrt{\bar{b} \times b}$$

$$= \sqrt{0.06 \times 0.75} = 0.21$$

وهي نتيجة صحيحة لأنها ضمن الفترة التي تقع فيها قيمة معامل الارتباط حيث

$$-1 \leq r \leq 1$$

مثال : إذا علمت أن معادلة انحدار (ص) على (س) هي :

$$\text{ص} = 0.94\text{س} + 6.2$$

ومعادلة انحدار (س) على (ص) هي

$$\text{س} = 1.5\text{ص} - 3.2$$

فبين أنه يوجد خطأ فى أحد هاتين المعادلتين .

$$\text{الحل : } \bar{b} = 0.94 \quad \bar{b} = 1.5$$

$$r = \sqrt{\bar{b} \times \bar{b}}$$

$$= \sqrt{1.5 \times 0.94} = \sqrt{1.41} = 1.19 \text{ تقريباً}$$

∴ يوجد خطأ فى إحدى المعادلتين لأن قيمة معامل الارتباط أكبر من الواحد الصحيح وهى لا يمكن أن تزيد عن الواحد الصحيح .

مثال : إذا علمت أن الوسط الحسابى والانحراف المياري للمتغير (س) هما 1 ، 0.45 على الترتيب، وأن الوسط الحسابى والانحراف المياري للمتغير (ص) هما 5 ، 1.43 على الترتيب فأوجد معادلة خط انحدار (ص) على (س) علماً بأن معامل الارتباط بين قيم (س) ، (ص) هو 0.67 ثم تتبأ بقيمة (ص) عندما (س) = 10 .

$$\text{الحل:} \quad \bar{b} = r \times \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$$

$$2.13 = \frac{1.43}{0.45} \times 0.67 =$$

$$\dots \bar{a} = \bar{y} - \bar{b} \bar{x}$$

$$2.87 = 1 \times 2.13 - 5 =$$

∴ معادلة خط انحدار (ص) على (س) هى

$$\hat{y} = 2.13 + 2.87x$$

قيمة (ص^ر) عندما س_د = 10 هي

$$\text{ص}^{\text{ر}} = 2.87 + 2.13 \times 10$$

$$24.17 = 21.30 + 2.87 =$$

طريقة العزوم لحساب معادلة خط الانحدار :

طريقة المربعات الصغرى السابقة لتقدير معادلة الانحدار تعطى نفس نتائج طريقة العزوم ، ولكن لطريقة العزوم أهمية خاصة عند الحديث عن الانحدار المتعدد ، وهذه الطريقة تساعد على معرفة المعنوية الإحصائية للعلاقة القياسية المقدرة وغير ذلك من المعايير الإحصائية الأخرى .

خطوات حساب معادلة الانحدار بطريقة العزوم :

$$1- \text{ نحصل على عزوم س على ص} = \frac{\text{مجم س ص}}{\text{ن}} - \frac{\text{مجم س} \times \text{مجم ص}}{\text{ن}^2}$$

$$\text{أو} = \text{مجم س ص} - \frac{\text{مجم س} \times \text{مجم ص}}{\text{ن}}$$

$$2- \text{ نحصل على عزوم س على س} = \frac{\text{مجم س}^2}{\text{ن}} - \frac{(\text{مجم س})^2}{\text{ن}^2}$$

$$\text{أو} = \text{مجم س}^2 - \frac{(\text{مجم س})^2}{\text{ن}}$$

$$3- \text{ نحصل على عزوم ص على ص} = \frac{\text{مج ص}^2}{\text{ن}} - \frac{(\text{مج ص})^2}{\text{ن}^2}$$

$$\text{أو} = \text{مج ص}^2 - \frac{(\text{مج ص})^2}{\text{ن}}$$

$$4- \text{ قيمة معامل الانحدار } \hat{\beta} = \frac{\text{عزوم ص على ص}}{\text{عزوم ص على ص}} = \frac{\text{ع س ص}}{\text{ع س س}}$$

$$5- \text{ قيمة } \hat{\alpha} = \bar{\text{ص}} - \bar{\text{ب}} \hat{\beta}$$

اختبار معنوية معامل الانحدار :

ولعرفة المعنوية الإحصائية لمعامل الانحدار (ب) يلزمنا الحصول على قيمة (ت) المحسوبة ويكون ذلك من خلال الخطوات التالية :

$$1- \text{ نحصل على تباين البواقي} = \text{ع س ص} - \text{ب} \times \text{ع س ص}$$

حيث ع س ص عزوم ص على ص ، ع س ص عزوم ص على ص .

$$2- \text{ تباين الخطأ} = \text{تباين البواقي} \times \text{ن} / (\text{ن} - 2)$$

حيث ن هي عدد المشاهدات

تباين الخطأ

$$3- \text{ تباين (ب)} = \frac{\text{تباين الخطأ}}{\text{ن} \times \text{ع س س}}$$

ن \times ع س س

$$4- \text{ الخطأ القياس لمعدل التغير الحدى (ب)} = \sqrt{\text{تباين (ب)}}$$

ب

5- قيمة (ت) المحسوبة = $\frac{\text{الخطأ القياسي لمعدل التغير الحدى}}{\text{قيمة (ت) المحسوبة}}$

6- نقارن (ت) المحسوبة بقيمة (ت) الجدولية التى يتم استخراجها من جدول (ت) الإحصائى عند درجة حرية (ن - 2) أو درجة حرية الخطأ ، فإذا كانت (ت) المحسوبة أكبر من أو يساوى قيمة (ت) الجدولية فإن ذلك يدل على أن معدل التغير الحدى أو معامل الانحدار (ب) معنوى .

مثال : قدر العلاقة القياسية بين قيم المتغير (ص) وقيم المتغير (س) بطريقة العزوم ثم اكشف عن المعنوية الإحصائية لمعامل الانحدار . إذا عمت أن :

| | | | | | |
|---|---|---|---|----|---|
| س | 3 | 2 | 1 | 3 | 1 |
| ص | 9 | 8 | 5 | 10 | 8 |

الحل : نكون جدول الحل التالى وهو نفس الجدول السابق مع إضافة عمود جديد هو عمود ص² .

| س | ص | س ص | س ² | ص ² |
|---------|----|-----|----------------|----------------|
| 3 | 9 | 27 | 9 | 81 |
| 2 | 8 | 16 | 4 | 64 |
| 1 | 5 | 5 | 1 | 25 |
| 3 | 10 | 30 | 9 | 100 |
| 1 | 8 | 18 | 1 | 64 |
| 10 | 40 | 86 | 24 | 334 |
| المجموع | | | | |

$$\frac{\text{مجد س ص} - \frac{\text{مجد س} (\text{مجد ص})}{2}}{2} = \text{عص ص}$$

$$\frac{\text{مجد س ص} - \frac{\text{مجد س} (\text{ص})}{2}}{2} =$$

$$1.2 = 16 - 17.2 = \frac{40 \times 10}{2(5)} - \frac{86}{5} =$$

$$\frac{\frac{\text{مجد س}^2 (\text{مجد ص})}{2}}{2} - \frac{\text{مجد س}^2}{2} = \text{عص س}$$

$$0.8 = 4 - 4.8 = \frac{10 \times 10}{2(5)} - \frac{24}{5} =$$

$$\frac{\frac{\text{مجد ص}^2 (\text{مجد ص})}{2}}{2} - \frac{\text{مجد ص}^2}{2} = \text{عص ص}$$

$$2.8 = 64 - 66.8 = \frac{40 \times 40}{2(5)} - \frac{334}{5} =$$

$$1.5 = \frac{1.2}{0.8} = \frac{\text{عص ص}}{\text{عص س}} = \text{ب}$$

$$أ = \bar{ص} - \bar{ب س}$$

$$5 = 2 \times 1.5 - 8 =$$

∴ معادلة الانحدار هي

$$\hat{ص} = 1.5 + 5 س$$

ولمعرفة المعنوية الإحصائية لمعامل الانحدار (ب) نسترشد بخطوات الحل السابق ذكرها لتحديد المعنوية الإحصائية .

$$\text{تباين البواقي} = ع س - ب \times ع س$$

$$1 = 1.2 \times 1.5 - 2.8 =$$

ن

$$\text{تباين الخطأ} = \text{تباين البواقي} \times \frac{ن - 2}{ن}$$

$$= 1 \times \frac{5 - 2}{5} = 0.6$$

$$1.67 = \frac{5}{3} \times 1 = \text{تقريباً}$$

$$\text{تباين (ب)} = \frac{\text{تباين الخطأ}}{n \times \text{ع.س.ب}} = \frac{1.67}{0.8 \times 5} = 0.42 \text{ تقريباً}$$

$$\sqrt{\text{تباين (ب)}} = \text{الخطأ القياسي}$$

$$= \sqrt{0.42} = 0.65 \text{ تقريباً}$$

$$\text{(ت) المحسوبة} = \frac{\text{ب}}{\text{الخطأ القياسي}}$$

$$= \frac{1.5}{0.65} = 2.31 \text{ تقريباً}$$

وبالكشف في جدول (ت) الإحصائي عن قيمة (ت) الجدولية بدرجة حرية (ن - 2) عند مستوى المعنوية 0.01. يتضح إنها تساوي 5.84 أى أن (ت) المحسوبة أقل من (ت) الجدولية وهذا يعنى أن قيمة (ب) غير معنوية إحصائياً .

الصورة القياسية لمعادلة الانحدار المقدرة هي :

$$\text{ص}^{\wedge} = 5 + 1.5 \text{ س.س.}$$

$$(2.31)$$

حيث الرقم بين القوسين يشير إلى قيمة (ت) المحسوبة .

مثال : أوجد معادلة خط انحدار ص على س بطريقة العزوم ثم اختبر المعنوية الإحصائية لمعامل الانحدار من واقع بيانات الجدول التالي :

| | | | | | |
|----|----|---|---|---|---|
| 7 | 5 | 2 | 5 | 3 | س |
| 15 | 10 | 5 | 7 | 4 | ص |

الحل : نكون جدول الحل التالي :

| ص ² | س ² | س ص | ص | س | |
|----------------|----------------|-----|----|----|---------|
| 16 | 9 | 12 | 4 | 3 | |
| 49 | 25 | 35 | 7 | 5 | |
| 25 | 4 | 10 | 5 | 2 | |
| 100 | 25 | 50 | 10 | 5 | |
| 225 | 35 | 105 | 15 | 7 | |
| 415 | 112 | 212 | 41 | 22 | المجموع |

$$\text{عس ص} = \frac{\text{مج س} \times \text{مج ص}}{\text{ن}} - \text{مج س ص}$$

$$31.6 = \frac{41 \times 22}{5} - 212 =$$

$$\text{عس س} = \frac{(\text{مج س})^2}{\text{ن}} - \text{مج س}^2$$

$$15.2 = \frac{22 \times 22}{5} - 112 =$$

$$\frac{(\text{مجم ص})^2}{\text{ن}} - \text{مجم ص}^2 = \text{عص ص}$$

$$78.8 = \frac{41 \times 41}{5} - 145 =$$

$$2.07 = \frac{31.6}{15.2} = \frac{\text{عص ص}}{\text{عس ص}} = \text{ب}$$

$$\begin{aligned} \text{أ} &= \overline{\text{ص}} - \overline{\text{ب س}} \\ &= \frac{\text{مجم ص}}{\text{ن}} - \frac{\text{مجم س}}{\text{ن}} \end{aligned}$$

$$0.908 = \frac{22}{5} \times 2.07 - \frac{41}{5} =$$

∴ معادلة الانحدار (ص) على (س) هي :

$$\text{ص}^{\wedge} = 2.07 + 0.907 \text{ س}$$

وللكشف عن معنوية معامل الانحدار (ب) فيجب الحصول على قيمة (ت) المحسوبة باتباع الخطوات السابق ذكرها كما يلي :

$$\text{تباين البواقي} = \text{عص ص} - \text{ب} \times \text{عس ص}$$

$$31.6 \times 2.07 - 78.8 =$$

$$13.39 =$$

$$\frac{n}{n-2} \times \text{تباين البواقي} = \text{تباين الخطأ}$$

$$22.3 = \frac{5}{2-5} \times 13.39 =$$

$$\frac{22.3}{0.29} = \frac{\text{تباين الخطأ}}{\text{تباين معامل الانحدار (ب)}} = \frac{n \times \text{ع د س}}{15.2 \times 5}$$

$$\sqrt{\text{تباين (ب)}} = \text{الخطأ القياسي}$$

$$0.54 = \sqrt{0.29} =$$

$$\frac{\text{ب}}{\text{الخطأ القياسي}} = \text{(ت) المحسوبة}$$

$$3.8 = \frac{2.07}{0.54} =$$

$$0.54$$

وبمقارنة (ت) المحسوبة بقيمة (ت) الجدولية عند مستوى المعنوية (0.01) ودرجة حرية (ن = 2) نجد أنها تساوى 5.84 أى أن قيمة (ت) المحسوبة أقل من قيمة (ت) الجدولية .

∴ معامل الانحدار غير معنوى .

وتكون الصيغة القياسية لمعادلة الانحدار هي :

$$\text{ص}^{\wedge} = - 2.07 + 0.907 \text{ س د}$$

$$(3.8)$$

خطأ التقدير :

يتبين من الأمثلة السابقة أن خط الانحدار قد لا يمر بجميع نقاط الظاهرة موضوع الدراسة ، ولذلك تكون هناك بعض النقاط لـ (س ، ص) مشتتة حول خط الانحدار ويقاس ذلك التشتت بالجذر التربيعي لمتوسط مربعات أبعاد النقاط الرأسية عن الخط (في حالة انحدار ص على س) ويسمى ذلك المقياس بخطأ التقدير ويرمز له بالرمز $\sigma_{\text{ع/ص}}$ في حالة انحدار ص على س وبالرمز $\sigma_{\text{ص/س}}$ في حالة انحدار س على ص .

ويكون خطأ التقدير مساوياً للصفر عندما تقع جميع نقاط (س ، ص) على خط الانحدار أى أنه يمكن اعتباره كمقياس لكمية الأخطاء التي تم الوقوع فيها .

ويأخذ هذا المقياس الصورة الرياضية التالية :

$$\sigma_{\text{ع/ص}} = \sqrt{\frac{1}{n-2} \times \text{مج} (\text{المشاهد} - \text{المقدر})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{مج} (\text{ص} - \hat{\text{ص}})^2}{n-2}}$$

أو باستخدام العلاقة

$$\sigma_{\text{ع/ص}} = \sqrt{\frac{\text{مج ص}^2 - \text{ب مج ص س} - \text{أ مج ص}}{n-2}}$$

$$\frac{\text{مج س}^2 - \text{ب مج س ص} - \text{أ مج س}}{\text{ن} - 2} = \text{وبالمثل فإن ع/ص}$$

وهي تمثل مقياس خطأ التقدير في حالة انحدار س على ص .

مثال : أوجد معادلة انحدار ص على س ثم احسب خطأ التقدير للبيانات التالية :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| س | 2 | 3 | 5 | 6 | 9 |
| ص | 1 | 5 | 2 | 3 | 4 |

الحل :

| س | ص | س ص | س ² | ص ² | ص - ص [^] | (ص - ص [^]) ² |
|---------|----|-----|----------------|----------------|--------------------|------------------------------------|
| 2 | 1 | 2 | 4 | 1 | 1.97 | 3.88 |
| 3 | 5 | 15 | 9 | 25 | 2.02 | 4.08 |
| 5 | 2 | 10 | 25 | 4 | 3.00 | 9.00 |
| 6 | 3 | 18 | 36 | 9 | 3.004 | 9.024 |
| 9 | 4 | 36 | 81 | 16 | 3.032 | 9.193 |
| المجموع | 25 | 81 | 155 | 55 | | 36.175 |

$$\frac{\text{مج س ص}}{\text{ن}} - \bar{\text{س}} \bar{\text{ص}}$$

$$\text{ب} = \frac{\text{مج س ص} - \left(\frac{\text{مج س}^2}{\text{ن}} \right)}{\text{ن} - 2}$$

$$3 \times 5 - \frac{81}{5}$$

$$\frac{\quad}{\quad} = \text{ب}$$

$$^2 \left[\frac{25}{5} \right] - 155$$

$$0.009 = \frac{1.2}{130} =$$

$$\bar{ص} - \bar{ب} = 1$$

$$2.95 = 5 \times 0.009 - 3 =$$

∴ معادلة انحدار ص على س هي :

$$\text{ص}^{\wedge} = 0.009 + 2.95$$

وبالتعويض عن قيم س المختلفة فى معادلة الانحدار المتحصل

عليها نحصل على قيم ص[^] كالتالى :

$$2.97 = 2 \times 0.009 + 2.95 = \text{ص}^{\wedge}_{2=}$$

$$2.98 = 3 \times 0.009 + 2.95 = \text{ص}^{\wedge}_{3=}$$

$$3.00 = 5 \times 0.009 + 2.95 = \text{ص}^{\wedge}_{5=}$$

$$3.004 = 6 \times 0.009 + 2.95 = \text{ص}^{\wedge}_{6=}$$

$$3.032 = 9 \times 0.009 + 2.95 = \text{ص}^{\wedge}_{9=}$$

$$\frac{\text{مجم} (\text{ص}^{\wedge} - \text{ص})^2}{2 - \text{ن}} \Bigg/ = \text{خطأ التقدير}$$

$$1.8 = \frac{\sqrt{9.92}}{3} =$$

وهذا يعنى أنه لتقدير قيمة (ص) بمعلومية قيمة (س) فإن الخطأ المعياري لهذا التقدير هو 1.8 .

مثال : إذا توفرت لديك البيانات التالية عن المتغيرين (س ، ص)

$$\bar{س} = 53 ، \bar{ص} = 45 ، \text{مجس}^2 = 29982 ،$$

$$\text{مجص}^2 = 21144 ، \text{مجسص} = 24924 ، ن = 10$$

أوجد :

أ - معادلة انحدار ص على س

ب- خطأ التقدير لخط انحدار ص على س

الحل :

$$\bar{س} = 53 ، ن = 10 ، \bar{ص} = 45$$

$$\therefore \text{مجس} = 530 ، \text{مجص} = 450$$

$$ن \text{ مجسص} - \text{مجس} \cdot \text{مجص}$$

$$= \frac{\text{ن مجس}^2 - (\text{مجس})^2}{2}$$

$$0.57 = \frac{450 \times 530 - 24924 \times 10}{2(530) - 29982 \times 10} =$$

$$\bar{a} = \bar{b} - \bar{c}$$

$$14.9 = 53 \times 0.57 - 45 =$$

∴ معادلة الانحدار هي :

$$\hat{c} = 0.57 + 14.9$$

$$\sqrt{\frac{\text{مج ص}^2 - \text{أ مج ص} - \text{ب مج س ص}}{2 - \text{ن}}} = \text{خطأ التقدير}$$

$$\sqrt{\frac{24984 \times 0.57 - 450 \times 14.9 - 21144}{2 - 10}} =$$

$$5.94 =$$

وهذا يعنى أنه لتقدير قيمة (ص) بمعلومية قيمة (س) فإن الخطأ المعياري لهذا التقدير هو 5.94 .

ملحوظة : يلاحظ أن معادلة الخطأ المعياري قريبة من معادلة الانحراف المعياري العادية حيث أن كلاهما يعتبر مقياساً للتشتت ، ولكن الاختلاف الوحيد بينهما أن الانحراف المعياري يقيس التشتت حول نقطة معينة هي الوسط الحسابي ، بينما الخطأ المعياري يقيس التشتت حول خط الانحدار .

معادلة الاتجاه العام الزمني General Trend Function

تعتبر معادلة الاتجاه العام الزمني من الدرجة الأولى صورة من معادلة خط الانحدار البسيط بينما إذا كانت معادلة الاتجاه العام الزمني من الدرجة الثانية أو الثالثة فهي صورة من صور الانحدار المتعدد .
والصورة الرياضية لمعادلة الاتجاه العام الزمني هي :

$$ص = \hat{a} \pm b س$$

حيث :

ص : القيمة المقدرة للمتغير التابع المراد معرفة الاتجاه العام له .

س : متغير أو عامل الزمن ، هـ : عدد السنوات

ونستخرج قيمة أ ، ب بنفس الطريقة السابقة في معادلة الانحدار البسيط مع ملاحظة أن متغير الزمن (س) يجب أن يبدأ من الرقم (1) إلى نهاية الفترة الزمنية الأمر الذي يعنى ضرورة تحويل الفترة الزمنية إلى أرقام خام تبدأ من (1) حتى نهاية الفترة .

فمثلاً إذا كان المتغير س يمثل الفترة من سنة 1995 إلى سنة 2000 فإن البيانات الخام لهذا المتغير تأخذ الأرقام كالتالى :

| السنة | البيانات |
|-------|----------|
| 1995 | 1 |
| 1996 | 2 |
| 1997 | 3 |
| 1998 | 4 |
| 1999 | 5 |
| 2000 | 6 |

فتكون القيم الممثلة لـ (س) عند دراسة الاتجاه العام لهذه الفترة هي 1, 2, 6 ويمكن استخدام معادلة الاتجاه العام فى التنبؤ بالمستقبل خلال سنة مستقبلية كما يتضح من المثال التالى :

مثال : الجدول التالى يوضح تطور إنتاج سلعة ما خلال الفترة 1995 – 1999 والمطلوب .

1- إيجاد معادلة الاتجاه العام التى تمثل هذا التطور فى الإنتاج .

2- التنبؤ بقيم إنتاج السلعة فى عام 2005 .

| السنوات (س) | 1995 | 1996 | 1997 | 1998 | 1999 |
|-------------|------|------|------|------|------|
| الإنتاج (ص) | 3 | 4 | 2 | 5 | 4 |

الحل : نحول السنوات إلى أرقام كما يتضح من جدول الحل .

| س | ص | س ص | س ² |
|---------|----|-----|----------------|
| 1 | 3 | 3 | 1 |
| 2 | 4 | 8 | 4 |
| 3 | 2 | 6 | 9 |
| 4 | 5 | 20 | 16 |
| 5 | 4 | 20 | 25 |
| المجموع | 15 | 57 | 55 |

$$\text{حيث } \bar{س} = \frac{15}{5} = 3 , \quad \bar{ص} = \frac{57}{5} = 11.4$$

$$\frac{\text{مجموع ص} - \text{ن} \cdot \bar{\text{ص}}}{\text{ن}}$$

$$\therefore \text{ب} = \frac{\text{مجموع ص}^2 - \text{ن} \cdot (\bar{\text{ص}})^2}{\text{ن} \cdot (\text{مجموع ص} - \text{ن} \cdot \bar{\text{ص}})}$$

$$\frac{3.6 \times 3 - \frac{57}{5}}{2 \left(\frac{\text{مجموع ص}}{\text{ن}} \right) - 55}$$

$$\frac{3.6 \times 3 - \frac{57}{5}}{2 \left(\frac{15}{5} \right) - 55} =$$

$$0.02 = \frac{0.8}{46} \text{ تقريباً}$$

$$\bar{\text{ص}} - \bar{\text{ب}} = \text{أ}$$

$$3.54 = 3 \times 0.02 - 3.6 =$$

∴ معادلة الاتجاه العام الزمني من الدرجة الأولى هي

$$\text{ص}^{\wedge} = 0.02 + 3.54$$

وتوضح هذه المعادلة أن كمية الإنتاج من هذه السلعة متزايدة خلال الفترة 1995-1999 وذلك لأن إشارة معلمة (ب) موجبة وأن مقدار التغير السنوي يقدر بحوالي 0.02 سنوياً وبقسمة مقدار التغير السنوي على متوسط الإنتاج السنوي (ص) أي 3.6/0.02 وهو يساوي 0.005 ، وأن نسبة الزيادة السنوية من المتوسط السنوي تقدر بحوالي 0.55%

$$\text{بى} \\ \text{أى أن معدل الزيادة السنوى} = \frac{\text{بى}}{\text{ص}} \times 100\%$$

التنبؤ بكمية الإنتاج عام 2005 :

أى تحويل سنة 2005 إلى رقم وبالتعويض عنه فى معادلة الاتجاه العام الزمنى (التعويض عن قيمة س بهذا الرقم) نحصل على قيمة ص التى تعنى كمية الإنتاج المتوقعة عام 2005 .

ولتحويل سنة 2005 إلى رقم نبدأ الترقيم من أول الفترة الزمنية وهى عام 1995 حتى نصل إلى سنة 2005 من المعادلة الآتية :

$$\text{الرقم المطلوب} = 2005 - 1995 + 1 = 11$$

وجمعنا 1 لأن سنة 1995 تدخل فى الاعتبار مع سنة 2005

∴ كمية الإنتاج عام 2005 هى :

$$\text{ص}^{\wedge} = 3.54 + 0.02 \times 11 = 3.76$$

التطبيق على السلاسل الزمنية:

إذا كان المتغير (س) هو الزمن فإن البيانات تظهر قيم س عند أوقات مختلفة . وتسمى البيانات المرتبة وفقاً للزمن باسم السلاسل الزمنية ، ويعنى خط انحدار ص على س فى هذه الحالة بخط الاتجاه العام ويستخدم غالباً لأهداف التوقع أو التنبؤ Forecasting . .

ووفقاً لهذه الطريقة يجب جعل عدد السنوات مساوياً للصفر وذلك يجعل السنة الوسطى فى السلسلة الزمنية يأخذ قيمة صفر . والسنوات التى قبلها تأخذ أرقام سالبة من -1 إلى ...الخ بالترتيب ،

والسنوات التي بعدها تأخذ أرقام موجبة من 1+ إلى الخ بالترتيب .
وتأخذ معادلة الانحدار الصيغة التالية عندما يكون $\text{مج س} = \text{صفر}$.

$$\text{مج ص} = \text{ن أ} + \text{ب مج س}$$

$$\text{مج ص} = \text{ن أ} - \text{صفر}$$

$$\therefore \text{أ} = \frac{\text{مج ص}}{\text{ن}}$$

$$\text{مج س ص} = \text{أ مج س} + \text{ب مج س}^2$$

$$\text{مج س ص} = \text{صفر} + \text{ب مج س}^2$$

$$\therefore \text{ب} = \frac{\text{مج س ص}}{\text{مج س}^2}$$

والمثال التالي تطبيق على استخدام السلاسل الزمنية

مثال : الجدول التالي يبين إنتاج سلعة ما بالطن خلال الفترة 84-
1994

والمطلوب :

1- إيجاد معادلة خط انحدار ص على س

2- تقدير الإنتاج في عامي 2000 ، 2005

| السنوات | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 | 91 | 92 | 93 | 94 |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| الإنتاج | 2 | 3 | 4 | 2 | 6 | 5 | 3 | 2 | 4 | 6 | 3 |

الحل :

| السنوات | س | ص | س ص | س ² |
|---------|-----|----|-----|----------------|
| 1984 | 5- | 2 | 10- | 25 |
| 1985 | 4- | 3 | 12- | 16 |
| 1986 | 3- | 4 | 12- | 9 |
| 1987 | 2- | 2 | 4- | 4 |
| 1988 | 1- | 6 | 6- | 1 |
| 1989 | صفر | 5 | صفر | صفر |
| 1990 | 1+ | 3 | 3 | 1 |
| 1991 | 2+ | 2 | 4 | 4 |
| 1992 | 3+ | 4 | 12 | 9 |
| 1993 | 4+ | 6 | 24 | 16 |
| 1994 | 5+ | 3 | 15 | 25 |
| المجموع | صفر | 40 | 14 | 110 |

السنة
الوسطى

حيث أن عدد السنوات في هذا التمرين فردى فإنه تم وضع
س = صفر للسنة الوسطى وهي 1998 بحيث يكون عدد السنوات التي
قبلها مساوياً لعدد السنوات التي بعدها وبذلك يكون مج س = صفر

$$\begin{aligned}
 \text{أ} &= \frac{\text{مج ص}}{\text{ن}} = \frac{40}{11} = 3.64 \\
 \text{ب} &= \frac{\text{مج س ص}}{\text{مج س}^2} = \frac{14}{110} = 0.13
 \end{aligned}$$

∴ معادلة الانحدار هي :

$$\text{ص}^{\wedge} = 0.13 + 3.64 \text{ س}$$

لحساب التنبؤ بكمية الإنتاج عام 2000 ، 2005

حيث أن السنة 1989 تناظر س = صفر

فإن السنوات 2000 ، 2005 تناظر س = 11 ، س = 16 على الترتيب

وبالتعويض فى معادلة الانحدار عن س = 11 ثم س = 16 نحصل على

$$\text{ص}^{\wedge} = 3.64 + 0.13 \times 11 = 5.07$$

$$\text{ص}^{\wedge} = 3.64 + 0.13 \times 16 = 5.72$$

مثال: الجدول التالى يبين قيمة الإنتاج المحلى من سلعة ما خلال

الفترة 1985-1994

| السنوات | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 | 91 | 92 | 93 | 94 |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| الإنتاج | 1 | 4 | 2 | 3 | 4 | 2 | 1 | 6 | 8 | 9 |

المطلوب:

1- توفيق معادلة الخط المستقيم الممثل لهذه البيانات

2- التنبؤ بقيمة الإنتاج المحلى عام 2005 .

الحل :

فى حالة عندما يكون عدد سنوات السلسلة الزمنية زوجى نأخذ

منتصف السنة الوسطى كأساس (منتصف 89 - 90) .

| السنوات | س | س ² × 2 ^(*) | ص | س ص | س ² |
|---------|------|-----------------------------------|----|-----|----------------|
| 1985 | 4.5- | 9- | 1 | 9- | 81 |
| 1986 | 3.5- | 7- | 4 | 28- | 49 |
| 1987 | 2.5- | 5- | 2 | 10- | 25 |
| 1988 | 1.5- | 3- | 3 | 9- | 9 |
| 1989 | .5- | 1- | 4 | 4- | 1 |
| 90/89 | صفر | صفر | | | |
| 1990 | .5+ | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 1991 | 1.5+ | 3 | 1 | 3 | 9 |
| 1992 | 2.5+ | 5 | 6 | 30 | 25 |
| 1993 | 3.5+ | 7 | 8 | 56 | 49 |
| 1994 | 4.5+ | 9 | 9 | 81 | 81 |
| المجموع | صفر | صفر | 40 | 112 | 330 |

(*) ضربنا في 2 للتخلص من الكسور

$$4 = \frac{40}{10} = \frac{\text{مجم ص}}{\text{ن}} = \text{أ}$$

$$0.34 = \frac{112}{330} = \frac{\text{مجم س ص}}{\text{مجم س}^2} = \text{ب}$$

معادلة الخط المستقيم هي :

$$\text{ص}^{\wedge} = 0.34 + 4 \text{ س}^{\wedge}$$

للتنبؤ بقيمة الإنتاج المحلي عام 2005

سنأخذ س عند سنة 2005 وهي س = 21

$$\text{ص}^{\wedge} = 4 + 0.34 \times 21 = 11.14$$

أمثلة عامة :

(1) الجدول التالي يوضح العلاقة بين قيمة الانفاق الاستهلاكي

(ص) بالدينار ومقدار الدخل الممكن التصرف فيه (س)

والمطلوب :

- تقدير معادلة انحدار ص/س بطريقتي المربعات الصغرى والعزوم
مفسراً النتيجة .

- اختبار معنوية معامل الانحدار .

- تقدير معامل الارتباط ومعامل التحديد مفسراً النتيجة .

- اختبار معنوية معامل الارتباط .

| ص ² | س ² | س ص | ص | س | |
|----------------|----------------|--------|------|------|---------|
| 10404 | 12996 | 11628 | 102 | 114 | |
| 11236 | 13924 | 12508 | 106 | 118 | |
| 11664 | 15876 | 13608 | 108 | 126 | |
| 12100 | 16900 | 14300 | 110 | 130 | |
| 14884 | 18496 | 16592 | 122 | 136 | |
| 15376 | 19600 | 17360 | 124 | 140 | |
| 16384 | 21904 | 18944 | 128 | 148 | |
| 16900 | 24336 | 20280 | 130 | 156 | |
| 20164 | 25600 | 22720 | 142 | 160 | |
| 21904 | 26896 | 24272 | 148 | 164 | |
| 22500 | 28900 | 25500 | 150 | 170 | |
| 23716 | 31684 | 27412 | 154 | 178 | |
| 197232 | 257112 | 225124 | 1524 | 1740 | المجموع |
| | | | 127 | 145 | المتوسط |

الحل :

أولاً : بطريقة المربعات الصغرى

$$\hat{b} = \frac{\sum (س - \bar{س})(مج - \bar{مج})}{\sum (س - \bar{س})^2}$$
$$0.86 = \frac{12(225124) - (1740)(1524)}{12(257112) - (1740)^2}$$

$$\hat{a} = \bar{ص} - \hat{b}\bar{س} = 127 - 0.86(145) = 2.30$$

وتكون معادلة خط الانحدار المقدّر للاستهلاك هي :

$$\hat{ص} = 0.86 + 2.30 س$$

تفسير النتيجة :

معامل انحدار هذه الدالة هو ($\hat{b} = 0.86$) وهو ميل خط الانحدار المقدّر الذى يقيس الميل الحدى للاستهلاك أو التغير الذى طرأ على الاستهلاك نتيجة لتغير الدخل بمقدار وحدة واحدة، بمعنى أن زيادة الدخل بمقدار وحدة واحدة يتبعه زيادة الأنفاق الاستهلاكية بمقدار 0.86 وحدة .

ثانياً : تقدير معامل الانحدار بطريقة العزوم :

$$\hat{ر} = \frac{\sum (س - \bar{س})(مج - \bar{مج})}{\sum (س - \bar{س})^2}$$

$$4144 = \frac{1524 \times 1740}{12} - 225124 =$$

$$4812 = \frac{{}^2(1740)}{12} - 2557112 = \frac{{}^2(\text{مج س})}{\text{ن}} - {}^2 \text{مج س} = \text{ع س}$$

$$3684 = \frac{{}^2(1524)}{12} - 197232 = \frac{{}^2(\text{مج ص})}{\text{ن}} - {}^2 \text{مج ص} = \text{ع ص}$$

$$0.86 = \frac{4144}{4812} = \frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}} = \text{ب}^{\wedge}$$

$$2.30 = \text{ص}^{\wedge} - \text{ب س}^{\wedge} =$$

وتكون معادلة خط الانحدار المقدرة للاستهلاك هي

$$\text{ص}^{\wedge} = 0.86 + 2.30 \text{ س}$$

وللكشف عن معنوية معامل الانحدار (ب[^]) فيجب الحصول

على قيمة (ت) المحسوبة بإتباع الخطوات السابق ذكرها كما يلي:

$$\text{تباين البواقي} = \text{ع ص} - \text{ب}^{\wedge} \times \text{ع س}$$

$$120.16 = (4144) (0.86) - 3684 =$$

$$\frac{\text{تباين الخطأ}}{\text{ن} - 2} = \text{تباين البواقي} \times$$

$$144.19 = \frac{12}{10} \times 120.16 =$$

$$0.002 = \frac{144.19}{4812 \times 12} = \frac{\text{تباين الخطأ}}{ن \times عدد} = \text{تباين معامل الانحدار (ب)}$$

$$0.045 = \sqrt{0.002} = \sqrt{\text{تباين (ب)}} = \text{الخطأ القياسي}$$

$$19.11 = \frac{0.86}{0.045} = \frac{\text{ب}}{\text{الخطأ القياسي}} = \text{ت المحسوبة}$$

وبمقارنة (ت) المحسوبة بقيمة (ت) الجدولية عند مستوى المعنوية (0.05) ودرجة حرية (ن = 10) نجد إنها تساوى (2.228) أى أن قيمة ت المحسوبة أكبر من قيمة ت الجدولية أى أن معامل الانحدار معنوى وتكون الصيغة القياسية لمعادلة الانحدار هى : $\hat{م} = 2.30 + 0.086 س$

(19.11)

تقدير معامل الارتباط :

$$r = \frac{\frac{\sum \text{مج س ص}}{ن}}{\sqrt{\frac{\sum \left(\frac{\text{مج ص}}{ن} \right)^2}{ن} + \frac{\sum \left(\frac{\text{مج س}}{ن} \right)^2}{ن}}}$$

$$0.98 = \frac{127 \times 145 - \frac{22512}{12}}{\sqrt{\frac{2(127) - \frac{197232}{12}}{2} \sqrt{\frac{2(145) - \frac{57112}{12}}{2}}}} = r$$

وهذه النتيجة تعنى وجود ارتباط قوى بين قيمة الأنفاق الاستهلاكية ومقدار الدخل ويلاحظ أن قيمة معامل الارتباط موجبة لأن قيمة معامل الانحدار موجبة .

إيجاد معامل التحديد (r^2) :

$$\text{معامل التحديد } (r^2) = \text{مربع معامل الارتباط} = (0.98)^2 = 0.96$$

وهذه النتيجة تعنى أن 96% من التغير في الأنفاق الاستهلاكية يفسرها التغير في الدخل بينما الباقي وهو 4% يعود إلى عوامل أخرى لم يتضمنها نموذج الانحدار البسيط .

اختبار معنوية معامل الارتباط :

لاختبار معنوية معامل الارتباط يجب استخدام اختبارات ذو الذيلين بدرجات حرية ($n - 2$) حيث $n = 12$ وعلى ذلك فإن النظرية الفرضية (الصفريية) والنظرية البديلة يمكن صياغتها كما يلي:

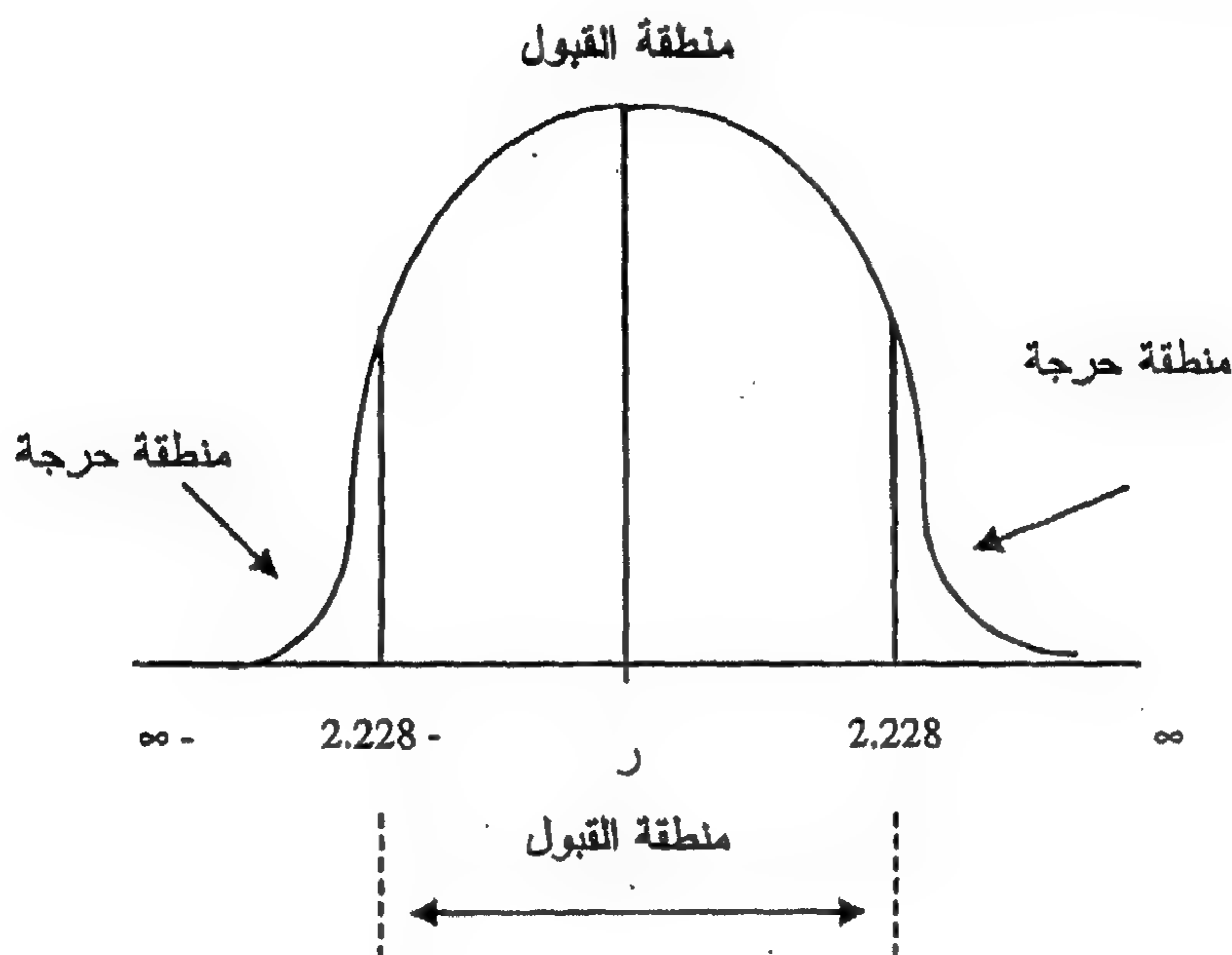
$H_0 : r = \text{صفر}$ النظرية الفرضية

$H_1 : r \neq \text{صفر}$ النظرية البديلة .

وبحساب قيمة (ت) كما يلي :

$$15.50 = \frac{\sqrt{2 - 12} \cdot 0.98}{\sqrt{0.96 - 1}} = \frac{r \sqrt{2 - n}}{\sqrt{r^2 - 1}} = t_r$$

أما قيمة (ت) الجدولية عند مستوى 0.05 ودرجة حرية 10
 فيهما تساوى 2.228 وعلى ذلك فإن قيمة (ت) المحسوبة لمعامل الارتباط
 أكبر من قيمتها الجدولية فإن معامل الارتباط يكون معنوى ويمكن
 توضيح هذا الاختبار فى الشكل التالى :



ومن الشكل يلاحظ أن قيمة (ت) المحسوبة وهى 15.5 تبعد
 عن منطقة قبول الفرض البديل وتجعله يقع فى المنطقة الحرجة .

تمارين

(1) أوجد معادلتى انحدار ص على س ، س على ص من واقع بيانات

الجدول التالى :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| س | 5 | 8 | 6 | 3 | 4 |
| ص | 2 | 7 | 3 | 5 | 1 |

(2) من بيانات الجدول التالى :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| س | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| ص | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

أوجد : أ - معادلة انحدار ص على س

ب- التنبؤ بقيمة ص عندما س = 12

(3) أوجد معادلة انحدار س على ص وتنبأ بقيمة ص عندما س = 15 من

البيانات التالية :

| | | | | | | |
|---|----|----|---|---|---|----|
| س | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 |
| ص | 12 | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 |

(4) إذا كانت قيمة الإنتاج الكلى لإحدى الشركات خلال الفترة من

94- 2000 بالآلاف دينار موضحة بالجدول التالى :

| | | | | | | | |
|--------------|----|----|----|----|----|----|------|
| السنوات | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 2000 |
| قيمة الإنتاج | 68 | 72 | 74 | 77 | 81 | 83 | 86 |

المطلوب: توفيق خط انحدار لقيمة الإنتاج على الزمن ثم قدر قيمة الإنتاج

عام 2005

(5) الجدول التالي يوضح العلاقة بين قيمة الإنفاق على الإعلان لسلعة ما خلال التليفزيون وبين قيمة المبيعات من هذه السلعة بالآلف دينار .

| | | | | | | |
|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|----|
| قيمة الإنفاق | 10 | 12 | 18 | 16 | 14 | 8 |
| قيمة المبيعات | 120 | 160 | 240 | 190 | 130 | 90 |

المطلوب : توفيق معادلة انحدار قيمة المبيعات على قيمة الإنفاق من الإعلان بطريقة العزوم . ثم تنبأ بقيمة المبيعات عندما يكون المنفق على الإعلان 50 .

(6) من بيانات الجدول التالي :

| | | | | | | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| س | 14 | 23 | 9 | 17 | 10 | 22 | 5 | 12 | 6 | 16 |
| ص | 68 | 15 | 40 | 79 | 81 | 95 | 31 | 72 | 45 | 93 |

المطلوب :

- 1- رسم خط الانتشار
- 2- أوجد معادلة الانحدار باستخدام طريقة المربعات الصغرى
- 3- احسب خطأ التقدير ع/ص

(7) من واقع البيانات التالية :

$$\begin{array}{ll}
 \text{مج س} = 1.23 & \text{مج ص} = 7.9 \\
 \text{مج س ص} = 1.61 & \text{مج س}^2 = 17.32 \\
 \text{مج ص}^2 = 29.3 & \text{ن} = 10
 \end{array}$$

أوجد :

أ - معادلة انحدار ص على س ، س على ص

ب- احسب خطأ التقدير ع/ص ، ع/ص

(8) إذا كانت 6 س + 4 ص = 36 أوجد

أ - قيمة س عندما ص = 6

ب- قيمة ص عندما س = 4

ج- الجزء المقطوع من محور ص

د - الجزء المقطوع من محور س

(9) أمكن التوصل إلى البيانات التالية عن المتغيرين س ، ص

مج س = 48 ، مج س² = 536 ، مج س ص = 720 ،

مج ص = 78 ، مج ص² = 1108 ، ن = 6

والمطلوب : (1) إيجاد معادلة انحدار ص على س بطريقة العزوم

(2) احسب خطأ التقدير ع/ص .

(10) إذا علمت أن الانحراف المعياري لقيم س هو 0.39 والانحراف

المعياري لقيم ص هو 1.24 ومعامل الارتباط هو 0.8 فأحسب معامل

انحدار ص/س.

(11) إذا علمت أن معادلتى انحدار ص على س ، س على ص هما

ص = 2.3 + 0.78 س

س = 4.2 + 1.56 ص

فبين أنه يوجد خطأ فى أحد هاتين المعادلتين .

(12) إذا علمت أن معادلتى انحدار ص على س ، س على ص هما

$$\text{ص} = 5.6 - 0.40 \text{ س}$$

$$\text{س} = 8.6 + 0.80 \text{ ص}$$

فبين أنه يوجد خطأ فى أحد هاتين المعادلتين

(13) الجدول التالى يوضح تطور الإنتاج من سلعة ما خلال

الفترة 92 - 98

| السنوات | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|
| الإنتاج | 10 | 12 | 16 | 17 | 19 | 18 | 15 |

المطلوب :

1- أوجد معادلة الاتجاه العام الزمنى .

2- تتبأ بنتيجة الإنتاج عام 2005 .

(14) إذا علمت أن

$$\text{مج س} = 28 ، \text{مج ص} = 35 ، \text{مج س ص} = 164 ،$$

$$\text{مج س}^2 = 80 ، \text{مج ص}^2 = 125 ، \text{س} = 4 ، \text{ص} = 5$$

المطلوب :

(1) قدر معادلة انحدار ص على س بطريقة العزوم .

(2) قدر المعنوية الإحصائية لمعامل الانحدار .

(3) تتبأ بقيمة ص عندما س = 100 .

الفصل السابع

مبادئ الاحتمالات

تمهيد:

تمثل نظرية الاحتمالات شأناً كبيراً بين الدراسات الرياضية والإحصائية نظراً لما لها من استخدامات تطبيقية فى كافة نواحي حياتنا اليومية خاصة فى مجال إتخاذ القرارات فى النواحي الإدارية والاقتصادية وبعض العلوم الأخرى مثل علم الإحصاء وعلم الوراثة، هذا بالإضافة إلى أن أسلوب التنبؤ وتحديد الاتجاهات المستقبلية للعديد من الظواهر إنما يعتمد كثيراً على الأسس النظرية والإحصائية لتحديد التوقع .

وقبل الدخول فى نظرية الاحتمالات يجب الإشارة إلى بعض التعاريف الخاصة بالتباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين وهى أحد الوسائل المستخدمة فى شرح نظرية الاحتمالات.

التباديل :

إذا تم ترتيب عناصر مجموعة ما وفقاً لنظام معين فإنه يطلق على مثل هذا النظام اسم تبديل ويمكن معرفة عدد التباديل التى يمكن الحصول عليها عند اختيار (ر) عنصر من مجموعة مكونه من (ن) عنصر باستخدام القانون الآتى :

$$\text{عدد التباديل} = {}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ملخص لقوانين التباديل

- (1) إذا كان لدينا عدة عمليات الأولى تحدث بعدد من الطرق بمقدار (أ) والثانية تحدث بعدد من الطرق مقداره (ب) والثالثة تحدث بعدد من الطرق مقداره (ج) فإن عدد الطرق أو عدد الترتيبات المختلفة التى يمكن أن تحدث بها هذه العمليات مع بعضها = أ × ب × ج .

(2) إذا كان لدينا عدد مقداره (ن) من العناصر فإن هذه العناصر يمكن ترتيبها بجانب بعضها (أى فى صف) بعدد من الترتيبات مقداره .

$$= \text{ن} (\text{ن} - 1) (\text{ن} - 2) \dots = \text{ن} !$$

(3) إذا كان لدينا عدد مقداره (ن) من العناصر والمراد ترتيبها فى صورة دائرية فإن عدد هذه الترتيبات = (ن - 1) !

(4) إذا كان لدينا عدد مقداره (ن) من العناصر والمراد ترتيبها فى مجموعات وكانت كل مجموعة تحتوى عدد (ر) من العناصر. أو بمعنى آخر إذا كان لدينا (ن) من العناصر وعدد (ر) من فرص الاختيار من هذه العناصر فإن عدد طرق ترتيب هذه المجموعات =

$$\frac{\text{ن} !}{(\text{ن} - \text{ر}) !}$$

(5) إذا كان لدينا عدد مقداره (ن) من العناصر وهذه العناصر منها عدد مقداره (ر) من العناصر المتشابهة تماماً وعدد مقداره (ج) من العناصر المتشابهة تماماً مع بعضها فإن عدد طرق ترتيب العدد (ن) من العناصر السابقة

$$= \frac{\text{ن} !}{\text{ر} ! \text{ج} !}$$

ملحوظة : لاحظ أن

$$\text{ن} ! = \frac{\text{ن} !}{(\text{ن} - \text{ن}) !} = \text{صفر}$$

$$n! = \frac{n!}{\text{صفر!}} =$$

مثال : (1)

إذا كان لدينا 5 حروف (أ ، ب ، ج ، د ، هـ) فما هو عدد التباديل اللازمة لأخذ 3 حروف منهم .

الحل :

$$\frac{5!}{2!} = \frac{5!}{(5-3)!} = {}^5P_3 = \text{عدد التباديل}$$

$$60 = \text{تبادل} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{1 \times 2}$$

ملحوظة :

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots (3-1)(2-1)(1-1) \dots$$

$$6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$$

مثال : (2)

بكم طريقة يمكن اجلاس 7 أشخاص على مائدة مستديرة ؟

الحل :

فى حالة الدائرة يمكن اجلاس فرد واحد فى أى مكان ثم

ترتيب بقية الأشخاص أى أن :

$$\text{عدد الطرق} = (n-1)! = (7-1)! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

$$= 720 \text{ طريقة .}$$

مثال : (3)

ما هو عدد الطرق التي يمكن بها غرس 10 شجرات مختلفة
الأنواع دائرياً حول منزل ؟

الحل :

$$\text{عدد الطرق} = (n-1)! = (10-1)! = 9! = 362880$$

طريقة .

التوافق :

عدد الطرق التي يمكن اختيار (r) تحدث مجموع مختلفة من
مجموعة بها (n) عنصر هي

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} =$$

وتكتب في الصورة ثقر أو $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ وتنطق (ن) فوق (ر)

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \text{ حيث}$$

لاحظ أن :

$$(1) \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1 \text{ حيث :}$$

$$1 = \frac{n!}{n!} = \frac{n!}{(n-0)! 0!} = \binom{n}{0}$$

$$1 = \frac{n!}{n!} = \frac{n!}{n! 0!} = \frac{n!}{(n-n)! n!} = \binom{n}{n}$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \quad (2)$$

$$\binom{8}{5} = \binom{8}{3}$$

أى أن :

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{1} \quad (3)$$

$$\frac{n!}{n! 2! 1!} = (n, 2, 1) \quad (4) \quad \text{أى أن :}$$

$$107 = \frac{5040}{32} = \frac{7!}{4! 3! 2!} = \binom{7}{4, 3, 2}$$

مثال : (4)

أوجد عدد الطرق المختلفة التى نحصل بها على 3 وجوه و 5 ظهور عند إلقاء 8 عملات معدنية متزنة .

الحل :

المطلوب معرفة ما هو عدد الطرق التي يمكن بها اختيار ثلاث رميات نحصل منها على وجه من 8 عملات .

$$\frac{!8}{!3!5} = \frac{!8}{!3!(3-8)} = \left[\begin{matrix} 8 \\ 3 \end{matrix} \right] = \text{عدد الطرق}$$

$$56 \text{ طريقة} = \frac{!5 \times 6 \times 7 \times 8}{2 \times 3 \times !5} =$$

مثال : (5)

يجرى انتخاب شخصين من بين 12 مرشح ما هي عدد الطرق التي يمكن بها اختيار شخصين مختلفين .

الحل :

في هذه الحالة لا نهتم بترتيب الشخصين المنتخبين أيهما يكون الأول وأيهما الثاني وبذلك فأنا أما حالة توافيق .

$$\frac{!10 \times 11 \times 12}{!2!(2-12)} = \left[\begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right] = \therefore \text{عدد الطرق}$$

$$66 \text{ طريقة} = \frac{!10 \times 11 \times 12}{!2!10} =$$

ملحوظة :

يلاحظ أنه بينما نهتم بالترتيب عند إجراء التباديل لا نهتم به عند إجراء التوافيق فالمجموعة أب ، ب أ هما تبدلين مختلفين حيث يهمنا ترتيبهما ولكنهما توفيقاً واحداً حيث لا يهمنا ترتيبهما.

مثال: (6)

بكم طريقة يمكن انتخاب 10 مرشحين من بين 12 مرشحاً .

الحل : هنا كالمثال السابق نفس العدد من المرشحين (ن) ولكن اختلف العدد الذي يجب اختياره .

$$\frac{! 12}{! 10 ! (10 - 12)} = \left[\begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right] = \text{عدد الطرق} \therefore$$

$$66 \text{ طريقة} = \frac{! 10 \times 11 \times 12}{! 10 \times ! 2} =$$

$$66 = \left[\begin{matrix} 12 \\ 10 \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right] \text{ استنتاج : يلاحظ أن}$$

مثال : (7)

امتحان مكون من أربعة أسئلة ما هي عدد الاحتمالات الممكنة لإجابات الطلبة لهذا الامتحان .

الحل :

إن الاحتمالات الرئيسية أن الطالب قد يجيب على أربعة أسئلة أو على ثلاثة أو على سؤالين أو سؤال واحد أو لا يجيب على الأسئلة كلها ولذلك فإن الحل هو مجموعة الاحتمالات السابقة .

$$16 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$$

تمارين

- (1) بكم طريقة يمكن زرع 8 أشجار مختلفة الأنواع دائرياً حول منزل ؟
- (2) ما هو عدد الطرق اللازمة لجلوس 6 أشخاص فى صف مستقيم ؟
- (3) تم ترشيح تسعة أفراد لتعينهم فى وظائف مدرس مساعد ومعيد ، ما هى الطرق الممكنة التى يمكن اختيار ثلاثة أفراد لتعينهم فى هذه المناصب ؟
- (4) بكم طريقة يمكن إعادة ترتيب حروف كلمة جنت ، بروكسل ، بلجيكا ، إسكندرية ، إيطاليا ، مراكش ، القسطنطينية .
- (5) ما هى النتائج الممكن حدوثها لإحدى فرق كرة القدم لعب 6 مباريات مع العلم بأن نتيجة المباراة الفوز أو التعادل أو الهزيمة ؟
- (6) يراد انتخابات مجلس إدارة جمعية تعاونية زراعية من 6 أفراد من صغار المزارعين و 4 أفراد من كبار المزارعين وكان المرشحون من صغار الزراع 10 أفراد ومن كبار الزراع 9 أفراد . بكم طريقة يمكن أن يتم هذا الانتخاب .

نظرية ذات الحدين

مفكوك ذات الحدين لأس صحيح موجب :

يقصد بالحددين هما مقدار جبرى مكون من حدين مثل (أ + ب) أو (س + ص) أو غيرهما .

منطوق النظرية :

إذا كانت (ن) عدد صحيح موجب فإن

$$(س+ص)^ن = س^ن + \left[\begin{matrix} ن \\ 1 \end{matrix} \right] ص س^{ن-1} + \left[\begin{matrix} ن \\ 2 \end{matrix} \right] ص^2 س^{ن-2} + ص^n$$

يلاحظ أن عدد الحدود = (ن + 1) دائماً فإذا كان لدينا المقدار (س+ص)⁴ فإن مفكوك هذا المقدار يحتوى على 5 حدود أى (4 + 1) .

ويمكن ترتيب المعاملات المختلفة لمفكوك ذات الحدين وفقاً للمثلث التالى والذى يسمى مثلث بسكال لمعاملات مفكوك ذات الحدين

| المعاملات | الأس |
|---------------|------|
| 1 1 | 1 |
| 1 2 1 | 2 |
| 1 3 3 1 | 3 |
| 1 4 6 4 1 | 4 |
| 1 5 10 10 5 1 | 5 |

ولتكوين هذا المثلث ما علينا إلا أن نكتب المعاملين للأس 1 وهما (1، 1) ثم كتابة المعاملات التالية فكل معامل منها هو نتيجة جمع المعامل العلوى له والمعامل الذى على يمين هذا العلوى فمثلاً للحصول على المعامل الثالث للأس الخامس فهو حاصل جمع العلوى له وهو 6 والذى على يمينه وهو 4 مع العلم بأن المعامل الأول والأخير كلاهما يساوى 1 دائماً بالنسبة لأي أس .

كما يلاحظ أن المعامل الأول = المعامل الأخير والمعامل الثانى = المعامل قبل الأخير والمعامل الثالث = المعامل قبل قبل الأخير وهكذا . ولذلك فإذا كان عدد المعاملات زوجى أن كل اثنين من المعاملات متساويين مثل حالة الأس الثالث أو الخاص من المثلث السابق . أما إذا كان عدد المعاملات فردى فإن كل معامل يكون له نظير فيما عدا معامل الحد الأوسط ما فى حالة الأس الثانى أو الرابع .

إيجاد حد من حدود ذات الحدين :

من المعروف أن الحد الأول فى مفكوك ذات الحدين

$$ص^0 س^0 = \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$ص^1 س^{n-1} = \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = \text{والحد الثانى}$$

$$ص^2 س^{n-2} = \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} = \text{والحد الثانى}$$

$$\text{الحد رقم (ر + 1)} = \binom{ن}{ر+1-1} \text{ ص }^{\text{ن}} \text{ س }^{\text{ر}}$$

$$\text{ص }^{\text{ن}} \text{ س }^{\text{ر}} = \binom{ن}{ر}$$

∴ لإيجاد الحد رقم 7 من مفكوك (س + ص)¹² يكون على الصورة

$$\text{ص }^6 \text{ س }^6 \binom{ن}{6} \binom{ح}{1+6} =$$

مثال : (8)

أكتب مفكوك المقدار (س + ص)⁴

الحل :

$$\text{ص }^4 \text{ س }^0 \binom{4}{0} + \text{ص }^3 \text{ س }^1 \binom{4}{1} + \text{ص }^2 \text{ س }^2 \binom{4}{2} + \text{ص }^1 \text{ س }^3 \binom{4}{3} + \text{ص }^0 \text{ س }^4 \binom{4}{4} = (\text{ص} + \text{س})^4$$

$$+ \text{ص }^4 \binom{4}{4}$$

$$= \text{ص }^4 + 4 \text{ ص }^3 \text{ س} + 6 \text{ ص }^2 \text{ س }^2 + 4 \text{ ص } \text{ س }^3 + \text{س }^4$$

مثال : (9) أكتب مفكوك (س + 5 ص)⁴

الحل:

$$^2(5ص)^2(4س) \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + ^3(5ص)(4س) \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + ^4(4س) \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = ^4(5ص+4س)$$

$$^4(5ص) \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} + ^3(5ص)(4س) \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} +$$

$$= 256س^4 + 128س^3ص + 2400س^2ص^2 + 2000سص^3 + 625ص^4$$

مثال : (10)

أوجد الحد الخامس من مفكوك $(2 + ب)^8$

الحل :

$$^4ب \cdot ^4(2) \frac{8!}{4!4!} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4+4 \end{bmatrix} = 5ح$$

مثال : (11)

باستخدام نظرية ذات الحدين أوجد جملة مبلغ 100 ألف دينار
استثمر لمدة 5 سنوات بفائدة مركبة 4% سنوياً .

الحل:

إيجاد جملة المبلغ بفائدة مركبة مقدارها 4% لمدة 5 سنوات هي

$$^3(0.04) \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + ^2(0.40) \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.40 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 = ^5(40 + 1)$$

$$+ ^5(0.04) + ^4(0.04) \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} +$$

$$100000 \times 1.2167 = 0.0000128 + 0.00064 + 0.016 + 0.2 + 1 =$$

$$121670 \text{ دينار}.$$

مثال : (12)

أوجد الحد الأوسط من مفكوك $(3 + 2 \text{ س})^9$

الحل :

حيث أن أس المقدار عدد فردى يكون هناك حدان أوسطان

ترتيبهما

$$\frac{1+9}{2}, \quad \frac{3+9}{2} \text{ أى الحد الخامس والحد السادس}$$

$$\text{الحد الخامس} = {}^5\text{ح} = \binom{\text{ح}}{1+4} = \binom{9}{4} {}^5(3) {}^4(2 \text{ س}) = {}^4\text{س} 489888$$

$$\text{الحد السادس} = {}^6\text{ح} = \binom{\text{ح}}{1+5} = \binom{9}{5} {}^5(3) {}^4(2 \text{ س})$$

مثال : (13)

أوجد الحد الأوسط من مفكوك $(4 \text{ س} + 5 \text{ ص})^4$

الحل :

حيث أن أس المقدار عدد زوجى فيوجد جد أوسط واحد فقط

ترتيبه

$$3 = \frac{1+4}{2}$$

أى الحد الثالث حيث أن هذا الحد يأتى بعده حدان وقبله حدان
وبذلك يقع فى المنتصف تماماً

$${}^2_5 \text{ ص } {}^2_4 \text{ س } \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = (1 + 2 \text{ ح}) = 3 \text{ ح}$$

$$2400 = {}^3_5 \text{ س } {}^2_5 \text{ ص}$$

تمارين

- (1) أوجد مفكوك (س + ص)⁶
- (2) أوجد مفكوك (أ + ب)⁷
- (3) أوجد مفكوك (2 س + 3 ص)⁶
- (4) أوجد مفكوك (5 س + 2 ص)⁴
- (5) أوجد الحد الثالث والخامس من مفكوك (5 س + 10 ص)⁸
- (6) أوجد جملة مبلغ 50000 دينار استثمر لمدة 5 سنوات بفائدة مركبة قدرها 5% نصف سنوياً .
- (7) أوجد : أ - الحد الذي يحتوى على س⁶ فى مفكوك (س + ص)¹²
ب - الحد السادس فى مفكوك (س + 3 ص)⁹
ج - معامل س¹¹ ص¹² فى مفكوك (س + ص)²³
- (8) أوجد الحد الأوسط فى مفكوك :
(1) (3 س + 4 ص)¹¹ ، (2) (أ + 3 ب)⁸

الاحتمالات البسيطة

Simple Probability

يمكن تعريف احتمال وقوع الحادث (أ) في تجربة ما بأنه النسبة بين عدد النتائج التي يتكون منها الحادث (أ) وبين عدد النتائج الكلية في التجربة فإذا رمزنا للاحتمال (أ) بالرمز ح (أ) فإن

$$\text{ح (أ)} = \frac{\text{عدد النتائج التي يتكون منها الحادث (أ)}}{\text{عدد النتائج الكلية في التجربة}}$$

وإذا علمنا أن احتمالات أي تجربة هو النجاح أو الفشل فإن مجموع احتمال النجاح والفشل يجب أن يكون مساوياً (الواحد الصحيح) بمعنى آخر أن مجموع احتمالات أي تجربة يساوي الواحد الصحيح وعموماً سنجد أن الاحتمال يأخذ شكل نسبة تتراوح بين الواحد الصحيح One و الصفر Zero

مثال : (14)

إذا ألقيت زهرة من زهر النرد على سطح أملس فأوجد احتمال الحصول على : (1) العدد 4 ، (2) عدد زوجي
الحل : نعلم أن للزهرة ستة أوجه تحمل الأعداد (1,2,3,4,5,6) وعلى ذلك فعند إلقاء الزهرة نجد أن :

عدد النتائج الكلية الممكنة لهذه التجربة = 6

وعدد النتائج التي يتكون منها الحادث (الحصول على 4) هي
 نتيجة واحدة فقط لأنه لا توجد على الزهرة غير (4) واحدة
 وبالتالي فإن :

$$(1) \quad \frac{1}{6} = \text{ح (4)}$$

$$(2) \quad \frac{3}{6} = \text{ح (عدد زوجي)}$$

مثال : (15)

سكشن به 30 طالب وطالبة منهم 19 من الذكور والبقية من
 الإناث فإذا اخترنا طالباً بطريقة عشوائية فما هو احتمال أن يكون فتاه .

الحل :

عدد الإناث في السكشن = 30 - 19 = 11 فتاه

$$\frac{11}{30} = \text{ح (اختيار فتاه)}$$

مثال : (16)

سحب كارت بطريقة عشوائية من مجموعة كاملة من ورق
 اللعب تحتوي على 52 كارت منها 26 كارت أسود ، 26 كارت
 أحمر، 13 كارت سباتي وأربع آسات فأوجد :

(1) احتمال سحب كارت أحمر

(2) احتمال سحب كارت سباتي

(3) احتمال سحب كارت آس

الحل :
(1) ح (سحب كارت أحمر) = $\frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

(2) ح (سحب كارت سبائي) = $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

(3) ح (سحب كارت آس) = $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

مثال : (17)

إذا ألقيت زهرتين من زهر النرد على سطح أملس فأوجد

احتمال:

- (أ) الحصول على مجموع (2) (ب) الحصول على مجموع (3)
(ج) الحصول على مجموع (4) (د) الحصول على مجموع (11)

الحل :

كل زهرة لها 6 أوجه وبالتالي فإن الزهرتان يمكن أن يظهرأ
معاً بعدد من الطرق قدرها $6 \times 6 = 36$ طريقة والحادث الحصول على
مجموع : (2) يمكن أن نحصل عليه بطريقة واحدة (1 ، 1) أى يظهر
على الزهرة الأولى (1) ، ويظهر على الزهرة الثانية (1) .

$$\frac{1}{36} = \text{ح} = (\text{الحصول على مجموع 2})$$

$$\frac{2}{36} = \text{ح} = (\text{الحصول على مجموع 3})$$

لأن حادث الحصول على مجموع (3) هو (1 ، 2) ، (2 ، 1)

وبالمثل فإن

$$\frac{3}{36} = \text{ح} = (\text{الحصول على مجموع 4})$$

$$\frac{2}{36} = \text{ح} = (\text{الحصول على مجموع 1})$$

لأن حادث الحصول على مجموع 11 من الزهرتين هو (5 ، 6) ،

(6 ، 5)

مثال : (18)

ما هو احتمال أن تسحب ورقة لعب تحمل رقم 5 من مجموعة

كاملة من ورق اللعب .

الحل : عدد أوراق اللعب 52 ورقة .

عدد الأوراق التي تحمل رقم 5 = 4 ورقات .

$$\frac{1}{13} = \frac{4}{52} = \text{الاحتمال المطلوب}.$$

$$\frac{12}{13} = \text{وا احتمال الأوراق التي لا تحمل رقم 5}$$

$$= 1 - \text{ح (تحمل الورقة رقم 5)}$$

الاحتمالات المركبة Compound Probability

إذا تكونت تجربة من تجربتين بسيطتين أو أكثر فإنها تسمى تجربة مركبة والاحتمالات المتعلقة بها تسمى احتمالات مركبة . مثل إلقاء قطعتين من النقود معاً فهي تجربة مركبة وتتكون من التجريبتين البسيطتين (رمى قطعة النقود الأولى ورمى القطعة الثانية) . وللتجربة الأولى نتيجتان صورة وكتابة ، وللتجربة الثانية نتيجتان صورة وكتابة أيضاً . فإذا رمزنا للصورة (ص) والكتابة بالرمز (ك) نجد أن التجربة المركبة تتكون من عدد من النتائج عددها $2 \times 2 = 4$ نتائج وهي (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك) .

• وإذا حاولنا إلقاء ثلاث قطع نقود فإن التجربة المركبة هنا

$$\text{تتكون من نتائج عددها } 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$$

$$= \text{(نتائج التجربة الواحدة) عدد التجارب}$$

وهذه النتائج هي (ص ص ص) ، (ص ص ك) ، (ص ك ص) ، (ص ك ك) ، (ك ص ص) ، (ك ص ك) ، (ك ك ص) ، (ك ك ك)

• وعلى ذلك إذا كان لدينا التجربة (أ₁) التي لها نتائج عددها

(ن₁) والتجربة (أ₂) التي لها نتائج عددها (ن₂) والتجربة (أ₃)

التي لها نتائج عددها (ن₃) .

فإن التجربة المركبة (أ₁ ، أ₂ ، أ₃) لها نتائج عددها (ن₁ × ن₂ × ن₃) .

فالتجربة المركبة من إلقاء زهرتين من زهرة النرد معاً يكون لها نتائج عددها $6 \times 6 = 36$ والتجربة المركبة من إلقاء 3 زهرات معاً يكون لها نتائج عددها $6 \times 6 \times 6 = 216$.

مثال : (19)

إذا ألقيت زهرتين من زهر النرد معاً على سطح أملس فما هو احتمال الحصول على رقمين حاصل جمعهما 2 أو 8 أو 12 .

الحل : عدد النتائج الممكنة لإلقاء زهرتين نرد هي $6 \times 6 = 36$

وعدد النتائج التي يتكون منها الحادث (المطلوب) يساوي 7 نتائج هي

| | | | | | | | |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| الزهرة الأولى : | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| الزهرة الثانية : | 1 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 6 |

$$\therefore \text{ح (المطلوب)} = \frac{7}{36}$$

قانون جمع الاحتمالات Addition Law

الحوادث المتنافرة أو المانعة أو الطاردة :

يقال للحدثين 1 ، 2 أنهما متنافران أو مانعان أو طاردان إذا كان وقوع أحدهما يمنع وقوع الآخر . فعند إلقاء قطعة نقود فإما أن تظهر الصورة أو الكتابة ولا يمكن أن تظهر الصورة والكتابة معاً ولذلك فإن الحادث ظهور الصورة أو الحادث ظهور الكتابة مانعان لأن حدوث أحدهما يمنع وقوع الآخر . فعند إلقاء زهرة نرد على سطح أملس فإن الحادث (الحصول على رقم زوجي) والحادث (الحصول على رقم يقبل القسمة على 2) غير مانعين لأن وقوع الحادث الأول (الذي يتكون

من النتائج 2 ، 4 ، 6) لا يمنع الحادث الذى يتكون من النتيجةين (3، 6) إذ قد نحصل على الرقم 6 وهو رقم زوجى وفى نفس الوقت يقبل القسمة على 3 .

جمع الاحتمالات للحوادث المانعة :

إذا كان A_1 ، A_2 حادثين مانعين فإن احتمال حدوث A_1 و A_2 يساوى مجموعة احتمال حدوث كل منهما على حدة أى أن $H(A_1 \text{ أو } A_2) = H(A_1) + H(A_2)$ أو تكتب $H(A_1 \cup A_2) = H(A_1) + H(A_2)$ ومعنى أن A_1 ، A_2 حادثين مانعين أى لا يوجد عناصر مشتركة بينهما.

مثال : (20)

مجموعة من الكرات تتكون من 15 كرة تحمل أرقام من 1 إلى 15) فإذا سحبت منها كرة واحدة بطريقة عشوائية فما هو احتمال أن يكون الرقم المدون على الكرة يقبل القسمة على 4 أو يقبل القسمة على 7 .

الحل : الحادث (يقبل القسمة على 4) والحادث (يقبل القسمة على 7) مانعين لأن الأول يتكون من النتائج (4 ، 8 ، 12) والثانى يتكون من النتائج (7 ، 14) ولا توجد نتيجة مشتركة بينهما أى لا يوجد فى المجموعة كلها رقم يقبل القسمة على 4 وفى نفس الوقت يقبل القسمة على 7 وبالتالى فإن $H(\text{الرقم يقبل القسمة على 4 أو 7}) = H(\text{يقبل القسمة على 4}) + H(\text{يقبل القسمة على 7})$.

$$\frac{1}{3} = \frac{5}{15} = \frac{2}{15} + \frac{3}{15} =$$

جمع الاحتمالات للحوادث غير المانعة :

إذا كان A_1 ، A_2 حادثين غير مانعين فإن

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

$$\text{أو تكتب } P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

مثال : (21)

فى المثال السابق أوجد احتمال أن يكون الرقم المدون على الكرة يقبل القسمة على 3 أو 5 .

الحل :

الحادث يقبل القسمة على 3 يتكون من النتائج (9 , 12 , 15 , 3 , 6) والحادث يقبل القسمة على 5 يتكون من النتائج (5 , 10 , 15) والحادث يقبل القسمة على (3 , 5) يتكون من نتيجة واحدة وهى (15) .

ومن الواضح أن الحادث (يقبل القسمة على 3) والحادث (يقبل القسمة على 5) غير مانعين وذلك لوجود نتيجة مشتركة بينهما وهى (15) حيث تقبل القسمة على (3 , 5) وبالتالي فإن $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$ (تقبل القسمة على 3 أو 5) = $P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$ (تقبل القسمة على 3 ، 5)

$$\frac{7}{15} = \frac{1}{15} - \frac{3}{15} + \frac{5}{15} =$$

قانون ضرب الاحتمالات :

الحوادث المستقلة :

يقال للحدثين A ، B أنهما مستقلان إذا كان وقوع أحدهما لا يؤثر على وقوع الآخر. فإذا ألقيت زهرة واحدة من زهر النرد على سطح أملس مرتين فإن حادث الحصول على رقم (5) في المرة الأولى وحادث الحصول على رقم (5) في المرة الثانية يعتبران حادثان مستقلان لأن الحصول على رقم (5) في المرة الأولى لا يؤثر ولا يتأثر بالحصول على الرقم (5) في المرة الثانية. وإذا سحبت ورقتان من أوراق الكوتشينة فإن الحادث الحصول على ولد بالكارت الأول والحادث الحصول على ولد بالكارت الثاني يعتبران حادثان غير مستقلان إذا كنا لا نعيد الكارت المسحوب إلى المجموعة قبل سحب الكارت الثاني لأن الحصول على ولد بالكارت الثاني سيتأثر بالحصول على ولد الكارت الأول لأن عدد الأولاد سيصبح 3 بدلاً من 4 وعدد أوراق اللعب سيصبح (51 بدلاً من 52) أما في حالة رجوع الكارت الأول وخلط الورق جيداً قبل سحب الكارت الثاني يكون الحدثين الحصول على ولد بالكارت الأول والحصول على ولد بالكارت الثاني مستقلين .

ضرب الاحتمالات للحوادث المستقلة :

إذا كان A ، B حدثين مستقلين فإن احتمال وقوع كل من

A ، B هو :

$$P(A, B) = P(A) \times P(B) .$$

مثال : (22)

ألقيت زهرة واحدة من زهر النرد على سطح أملس مرتين أوجد احتمال الحصول على العدد (5) فى المرتين .

الحل :

احتمال الحصول على العدد (5) فى المرة الأولى = $6/1$ = ح (أ₁)

احتمال الحصول على العدد (5) فى المرة الثانية = $6/1$ أيضا = ح (أ₂)

$$\therefore \text{ح (أ}_1\text{، أ}_2\text{)} = \text{ح (أ}_1\text{)} \times \text{ح (أ}_2\text{)} = 6/1 \times 6/1 = 36/1$$

مثال : (23) سحب كارتان من مجموعة كاملة لورق اللعب تحتوى على 52 كارت وتحتوى على 4 أولاد و 13 كارت من النوع السباتى فإذا كنا نعيد الكارت الأول ونخلط الورق جيداً قبل سحب الكارت الثانى فأوجد :

(1) احتمال أن يكون كل من الكارتين المسحوبين ولد.

(2) احتمال أن يكون كل من الكارتين المسحوبين سباتى.

الحل :

ح (سحب ولد) = $52/4$ ، ح (سحب سباتى) = $52/13$

ح (أ₁ ، أ₂) = ح (أ₁) × ح (أ₂)

$$\text{ح (سحب ولدين)} = \frac{4}{52} \times \frac{4}{52} = \frac{1}{169}$$

$$\text{ح (سحب ورقتين سباتى)} = \frac{13}{52} \times \frac{13}{52} = \frac{1}{169}$$

ضرب الاحتمالات للحوادث غير المستقلة :

إذا سحبنا كارتاً واحداً بطريقة عشوائية من مجموعة كاملة لورق اللعب وتبيناه ولم نرجعه إلى المجموعة وسحبنا كارتاً آخر فإن احتمال أن يكون الكارت الثانى من النوع السباتى $= 51/12$ إذا كان الكارت الأول من النوع السباتى، ويساوى $15/13$ إذا كان الكارت الأول ليس من النوع السباتى ومن ذلك نتبين أن معرفتنا لنوع الكارت الأول تؤثر على حساب الاحتمال للكارت الثانى. وعموماً إذا كان لدينا حادثين غير مستقلين A_1 ، A_2 فإن احتمال وقوعهما معاً يحتوى على احتمال شرطى Conditional Probability حسب العلاقة :

$$P(A_1, A_2) = P(A_1) \times P(A_2 / A_1)$$

حيث $P(A_2 / A_1)$ تسمى بالاحتمال الشرطى وتعنى احتمال وقوع A_2 مع العلم بأن A_1 قد وقع .

مثال : (24) احسب المطلوب فى المثال السابق بفرض عدم إعادة الكارت الأول قبل سحب الكارت الثانى.

$$\text{الحل: } P(A_1) = 52/4 \text{ ح (سحب ولد) فى المرة الأولى}$$

$$P(A_2) = 51/3 \text{ ح (سحب ولد) فى المرة الثانية}$$

$$P(A_1) = 52/13 \text{ ح (سحب سباتى) فى المرة الأولى}$$

$$P(A_2) = 51/12 \text{ ح (سحب سباتى) فى المرة الثانية}$$

$$P(A_1, A_2) = P(A_1) \times P(A_2 / A_1)$$

$$\frac{1}{221} = \frac{3}{51} \times \frac{4}{52} = \text{ح (سحب ولدين)}$$

$$\frac{1}{17} = \frac{12}{51} \times \frac{13}{52} = \text{ح (سحب كارتين سياتي)}$$

تمارين

1) يحتوى صندوق على 20 كرة حمراء ، 30 كرة بيضاء ، 20 كرة زرقاء ، 15 كرة سوداء ، أحسب الاحتمالات الآتية:

أ . احتمال أن تسحب كرة واحدة سوداء أو حمراء .

ب . احتمال تكون الكرة المسحوبة حمراء أو زرقاء .

ج . احتمال أن لا تكون الكرة المسحوبة حمراء أو زرقاء .

د . احتمال أن تكون الكرة المسحوبة زرقاء .

هـ - احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو بيضاء أو زرقاء .

2) احسب احتمال سحب ثلاثة أوراق بها صورة بنت من مجموعة كاملة من ورق اللعب (السحب بإرجاع مرة وبدون إرجاع مرة أخرى)

3) مخزن (أ) به 60 وحدة جيدة ، 40 وحدة رديئة ، ومخزن (ب) به 80

وحدة جيدة ، 20 وحدة رديئة ومخزن (ج) به 50 وحدة جيدة و50

وحدة رديئة فإذا سحبنا وحدة واحدة من كل مخزن . احسب الآتى :

(أ) احتمال أن تكون الثلاث وحدات جيدة .

(ب) احتمال أن تكون الثلاث وحدات رديئة .

(ج) احتمال أن تكون الأولى جيدة والثانية والثالثة رديئة .

(د) احتمال أن تكون الأولى والثالثة جيده والثانية رديئة .

(4) إذا كان احتمال الحياة للزوج مدة عشر سنوات بعد اليوم $= 7/1$ واحتمال حياة الزوجة مدة عشر سنوات بعد اليوم $= 9/1$ احسب الاحتمالات الآتية :

1- احتمال أن يعيشا سوياً مدة عشر سنوات .

2- احتمال أن يتوفيا سوياً خلال هذه المدة .

3- احتمال أن يعيش الزوج وتتوفى الزوجة .

4- احتمال أن يتوفى الزوج وتعيش الزوجة .

(5) إذا كان احتمال نجاح الطالب فى مادة الاقتصاد هو 5. واحتمال نجاحه فى مادتي الاقتصاد والرياضة سوياً 0.45 وإذا كان نجاحه فى مادة واحدة على الأقل فى هاتين المادتين هو 0.80 احسب احتمال نجاح الطالب فى مادة الرياضة .

(6) إذا كان احتمال توزيع مذكرة الرياضة هو 0.8 واحتمال توزيع مذكرة الاقتصاد هو 0.9 احسب احتمال توزيع أحدهما على الأقل .

(7) عند إلقاء ثلاث قطع نقود متزنة مرة واحدة أوجد احتمال أن تكون الأوجه الثلاثة متشابهة أو أن تظهر الصورة على وجهين على الأقل ، ثم أوجد احتمال أن تكون الأوجه الثلاثة متشابهة أو أن تظهر الصورة على وجهين فقط.

(8) صندوق به 10 كرات مرقمة من 1 إلى 10 إذا سحبنا كرة عشوائياً من هذه الكرات من هذا الصندوق فأوجد ما يلى :

1- احتمال أن يكون على الكرة رقماً زوجياً أو أقل من أو يساوى 5 .

2- احتمال أن يكون على الكرة رقماً 3 أو أكبر من 6 .

(9) كيس به 20 كرة منها 7 حمراء ، 8 بيضاء ، 5 صفراء سحبت 3 كرات عشوائياً من هذا الكيس أوجد احتمال أن تكون الأولى صفراء والثانية حمراء والثالثة بيضاء إذا كان :

أولاً: السحب بإرجاع .

ثانياً : السحب بدون إرجاع .

(10) من التمرين السابق أوجد احتمال أن تكون الكرات الثلاثة حمراء إذا كان السحب بإرجاع مرة وبدون إرجاع مرة أخرى .

التوزيعات الاحتمالية

أولاً : توزيع ذو الحدين :

إذا كان $ل$ تمثل احتمال حدوث حدث معين فى محاولة واحدة فيقال إنه احتمال النجاح وبالتالي يكون $ل = 1 - ل$ هو احتمال الفشل .
فإذا فرض أن احتمال حدوث حدث معين (س) مرة فى عدد من المحاولات مقداره (ن) محاولة فإن هناك (س) محاولة تمثل عنصر النجاح ، (ن - س) تمثل الفشل وتعطى بالمعادلة التالية :

$$ح(س) = \binom{ن}{س} (ل)^س (ل)^{ن-س}$$

$$= \frac{ن!}{(ن-س)! س!} (ل)^س (ل)^{ن-س}$$

فمثلاً احتمال الحصول على الصورة فى رمى قطعة نقود من الممكن التعبير عنه بالرموز (ص) وبالتالي فإن احتمال الحصول على الكتابة = $1 - ص = ك$ أو $1 - ح(ص) = ح(ك)$.

فعند رمى ثلاث قطع نقود مرة واحدة فإنه من الممكن الحصول على أى من التوافيق الممكنة لكل من الصورة والكتابة كما يلى :

| الاحتمال | الحالة |
|---------------------------|--------|
| $8/1$ (ص ³) | ص ص ص |
| $8/1$ (ص ² ك) | ص ص ك |
| $8/1$ (ص ² ك) | ص ك ص |
| $8/1$ (ص ² ك) | ك ص ص |
| $8/1$ (ص ك ²) | ص ك ك |
| $8/1$ (ص ك ²) | ك ص ك |
| $8/1$ (ص ك ²) | ك ك ص |
| $8/1$ (ك ³) | ك ك ك |

وهكذا يكون لدينا مجموعة من الأحداث مستبعدة لحدوثها البعض وحيث أن مجموع الاحتمالات الكلية لأي تجربة يساوى الواحد الصحيح فإن :

$$1 = \text{ح (ص}^3 + 3 \text{ ص}^2 \text{ ك} + 3 \text{ ص ك}^2 + \text{ك}^3 \text{)}$$

والجزء الأيمن من المعادلة هو عبارة عن مفكوك ذات الحدين (ص + ك)³ وتوزيع النتائج يطلق عليه توزيع ذو حدين وهو عبارة عن توزيع احتمال متقطع .

مثال : (25)

إذا كانت فرصة فوز المنافس لمباراة ما هي (0.6) إذا تم اللعب 4 مباريات فما هو احتمال أن يكسب صفر ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، من المباريات على الترتيب.

الحل :

احتمال الفوز هو (0.6) وبالتالي فإن احتمال الخسارة يكون
1- 0.6 = 0.4 وبالتالي نحصل على كل الاحتمالات الممكنة
بمفكوك ذات الحدين .

$$(0.6) \binom{4}{3} + {}^2(0.4) {}^2(0.6) \binom{4}{2} + (0.4) {}^3(0.6) \binom{4}{1} + {}^4(0.6) = {}^4(0.4 + 0.6) \\ {}^4(0.4) + {}^3(0.4)$$

$${}^4(0.4) + {}^3(0.4) (0.6) 4 + {}^2(0.4) {}^2(0.6) 6 + (0.4) {}^3(0.6) 4 + {}^4(0.6) =$$

مما سبق يتضح أن توزيع ذو الحدين يستعمل أساساً كتوزيع
للمتغيرات المتقطعة والتي تحدث في صورتين فقط مثل الحصول على وجه
أو ظهر من رمى قطعة نقود معدنية أو إنجاب ذكر أو أنثى أو وصول
البيض سليم أو فاسد أو نباتات مصابة أو سليمة ونجد أن كل من ل1 ،
ل2 هما الاحتمال البسيط للنجاح والفشل وكل منها كسر موجب
ومجموعها يساوى الواحد الصحيح .

توزيع ذو الحدين عندما يكون ل1 = ل2 = 2/1 :

مثال : (26)

في عائلة مكونة من 6 أطفال ما هي الاحتمالات المختلفة لجنس
هؤلاء الأطفال .

الحل :

في الواقع أن هناك عديد من الاحتمالات الممكنة لهؤلاء الستة
أطفال يمكن توضيحها في التالي :

| أنثى | ذكر | احتمال |
|------|-----|--------|
| - | 6 | احتمال |
| 1 | 5 | احتمال |
| 2 | 4 | احتمال |
| 3 | 3 | احتمال |
| 4 | 2 | احتمال |
| 5 | 1 | احتمال |
| 6 | - | احتمال |

ومن هنا نجد أن عدد الاحتمالات الكلية الممكنة يزيد واحد عن عدد الأفراد وحيث أن عدد الأطفال 6 وعدد الاحتمالات 7 ومقابل لكل توفيق من القوانين السابقة احتمال نظري أو رياضي من الممكن الحصول عليه من مفكوك المعادلة $(ل+1ل^2)^n$ حيث أن ل هو احتمال الحصول على ذكر ويساوى $\frac{1}{2}$ ، ل هو احتمال الحصول على أنثى ويساوى $\frac{1}{2}$ وبذلك تصبح المعادلة العامة هي $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^6$ ومفكوكها يعطى جميع الاحتمالات للسبعة أحداث السابقة .

$$^3(\frac{1}{2})^3 20 + ^2(\frac{1}{2})^4 (\frac{1}{2}) 15 + (\frac{1}{2})^5 (\frac{1}{2}) 6 + ^6(\frac{1}{2}) = ^6(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$$

$$+ ^6(\frac{1}{2}) + ^5(\frac{1}{2}) (\frac{1}{2}) 6 + ^4(\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2}) 15 +$$

ولاستخراج قيمة الاحتمال الخاصة بالحصول على ستة أطفال ذكور هو مفكوك الحد الأول من مفكوك ذات الحدين $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^6$.

ولتوضيح ذلك نضع جميع الاحتمالات في الشكل التالي :

$$1- \text{ح (ستة أطفال ذكور)} \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0.015625$$

$$2- \text{ح (خمسة أطفال ذكور وأنثى واحدة)} 6 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 0.093750$$

$$3- \text{ح (أربعة ذكور وأنثتان)} 15 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.234375$$

$$4- \text{ح (ثلاثة أطفال ذكور وثلاثة إناث)} 20 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.312500$$

$$5- \text{ح (طفلان ذكور وأربعة إناث)} 15 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0.234375$$

$$6- \text{ح (طفل ذكر وخمسة إناث)} 6 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0.093750$$

$$7- \text{ح (الأطفال الستة إناث)} \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0.015625$$

$$= 1.000000$$

مجموع الاحتمالات

توزيع ذو الحدين عندما $l \neq 1$ و $2 \neq 1$ ولكن مجموعهما يساوى الواحد الصحيح:

مثال : (27)

فى أحد حقول القطن وجد أن معدل الإصابة بمرض الذبول الفيوزارى للبادرات هو 30% فإذا فحصت 6 بادرات فما هى الاحتمالات المختلفة للإصابة من عدمها بالنسبة لهذه البادرات الستة .

الحل :

من الممكن التعبير رياضياً عن قيمة الاحتمالات المختلفة للأحداث على أساس مفكوك ذات الحدين حيث يكون احتمال الإصابة 30% واحتمال عدم الإصابة 70% ويعبر بمفكوك المعادلة :

$$(0.3)^6 + 6(0.3)^5(0.7) + 15(0.3)^4(0.7)^2 + 20(0.3)^3(0.7)^3 + 15(0.7)^2(0.3)^4 + 6(0.7)(0.3)^5 + (0.7)^6$$

ويعبر عن جميع الاحتمالات في صورة الجدول التالي :

الاحتمال

- 1- احتمال أن تكون الستة نباتات مصابة $(0.3)^6 = 0.0008$
 - 2- احتمال أن تكون خمسة مصابة وواحدة سليمة $6(0.3)^5(0.7) = 0.0105$
 - 3- احتمال أن تكون أربعة مصابة و2 سليمة $15(0.3)^4(0.7)^2 = 0.05094$
 - 4- احتمال أن تكون 3 مصابة و 3 سليمة $20(0.3)^3(0.7)^3 = 0.1852$
 - 5- احتمال أن تكون 2 مصابة و 4 سليمة $15(0.3)^2(0.7)^4 = 0.3241$
 - 6- احتمال أن تكون واحدة مصابة وخمسة سليمة $6(0.3)(0.7)^5 = 0.3025$
 - 7- احتمال أن تكون 6 نباتات سليمة $(0.7)^6 = 0.1175$
- مجموع الاحتمالات = 1.0000

مثال : (28)

من المثال السابق ما هو احتمال الحصول على ثلاث نباتات مصابة وثلاثة سليمة .

الحل : فى هذه الحالة يجب معرفة ترتيب الحد الذى يحتوى على 3 مصابة و 3 سليمة فنجد الحد الرابع أى إذا كان المطلوب هو إيجاد مفكوك الحد الرابع من مفكوك $(0.7 + 0.3)^6$

$$0.1852 = {}^3(0.7) {}^3(0.3) \left[\begin{matrix} 6 \\ 3 \end{matrix} \right] = {}_{1+}$$

مثال : (29)

من المثال قبل السابق أوجد احتمال الحصول على 3 نباتات مصابة على الأقل .

الحل : فى هذه الطريقة قد تكون 3 مصابة أو 4 مصابة أو 5 مصابة أو 6 مصابة أى الاحتمال المطلوب يكون على صورة الحدود .

$${}^6(0.3) + {}^5(0.7) {}^1(0.3) \left[\begin{matrix} 6 \\ 1 \end{matrix} \right] + {}^4(0.7) {}^2(0.3) \left[\begin{matrix} 6 \\ 2 \end{matrix} \right] + {}^3(0.7) {}^3(0.3) \left[\begin{matrix} 6 \\ 3 \end{matrix} \right] \\ = 0.2559 = 0.0008 + 0.0105 + 0.0594 + 0.1852 =$$

حيث الأس الذى يعلو الرقم (0.3) يدل على عدد النباتات المصابة من إجمالى عدد البادرات وهو 6 وبالتالي إذا كان الأس هو 3 مثلاً فإن عدد النباتات السليمة المتممة للـ 6 هو 3 وكذلك إذا كان هو 4 فإن عدد النباتات السليمة يكون 2 وهكذا وحيث القانون يكون على الصورة :

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} s^n (1-s)^{n-r} \text{ حيث}$$

ن تدل على إجمالي عدد النباتات السليمة والمصابة معاً .

ن- ر تمثل عدد النباتات المصابة .

ر تمثل عدد النباتات السليمة .

مثال : (30)

من المثال السابق ما هو احتمال الحصول على 3 نباتات مصابة على الأكثر .

الحل : في هذه الحالة قد تكون 3 مصابة (والباقي سليم) أو 2 مصابة (والباقي سليم) أو واحدة مصابة (والباقي سليم) أو الكل سليم .

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} + {}^4(0.7) {}^4(0.3) \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} + {}^3(0.7) {}^3(0.3) \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \text{الاحتمال المطلوب}$$

$$(0.7) + 5(0.7)(0.3)$$

$$0.9293 = 0.1175 + 0.3025 + 41.32 + 0.1852 =$$

خواص توزيع ذو الحدين :

$$(1) \text{ المتوسط} = \mu = n \cdot p$$

$$(2) \text{ التباين} = \sigma^2 = n \cdot p \cdot q$$

$$(3) \text{ انحراف المعياري} = \sqrt{\text{التباين}} = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

$$(4) \text{ معامل العزوم للالتواء} = \frac{1L - 2L}{N \cdot 1L \cdot 2L}$$

$$(5) \text{ معامل العزوم للتفرطح} = 3 + \frac{2L - 6 \cdot 1L \cdot 2L}{N \cdot 1L \cdot 2L}$$

حيث N هو عدد التجارب أو عدد النتائج أو

1L هو احتمال النجاح ، 2L هو احتمال الفشل حيث $1L + 2L = 1$

مثال : (31)

فى عائلة مكونة من خمسة أطفال المطلوب استخراج المتوسط والتباين للمتغير (ذ) وهو عدد الذكور.

الحل :

$$\text{المتوسط } \mu = N \cdot 1L = 5 \times \frac{1}{2} = 2.5$$

$$\text{التباين } \sigma^2 = N \cdot 1L \cdot 2L = 5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1.25$$

ثانياً : توزيع بواسون Poisson Distribution

هذا التوزيع عبارة عن حالة من حالات توزيع ذو الحدين ويستعمل عندما يكون احتمال واقعة ما صغيرة جداً وعدد أفراد المجموعة كبير جداً . ويفيد هذا التوزيع فى الحالات التى لا يعرف فيها عدد الأفراد N والتوزيع تمثله العلاقة التالية :

$$P(x) = \frac{e^{-u} \cdot u^x}{x!}$$

حيث U وهو عبارة عن ثابت إحصائي معين وهي قيمة نظرية تمثل متوسط X .

$$e \text{ رقم ثابت } = 2.718$$

$$x = 1, 2, 3, \dots \text{ حيث } X \text{ متغير متقطع}$$

مثال : (32)

إذا كان متوسط عدد الأيام غزيرة الأمطار خلال فصل الشتاء في أحد مدن الجماهيرية هو 4 أيام في السنة فما هو احتمال سقوط الأمطار الغزيرة في هذه المدينة لمدة 6 أيام خلال فصل الشتاء .

الحل :

$$\text{باستعمال توزيع بواسون فإن قيمة } U = 4, X = 6$$

$$-4 \quad 6$$

$$P(X) = \frac{e^{-4} 4^6}{6!} = 0.1040$$

وهناك جداول خاصة بهذا التوزيع عن الاحتمالات الممكنة لبعض القيم .

ثالثاً : التوزيع الطبيعي Normal Distribution

يعتبر من أكبر التوزيعات التي تمت دراستها في الإحصاء . كما أنه يعتبر من أهم التوزيعات التي تختص بالمتغيرات المستمرة . وهو يقابل توزيع ذو الحدين للمتغيرات المتقطعة وفي حالة $l_1 = l_2 = 0.5$ وتكون (ن) كبيرة .

خصائص التوزيع الطبيعي :

(1) التوزيع الطبيعي عبارة عن توزيع مستمر يختلف عن كل من توزيع ذو الحدين وتوزيع بواسون حيث يختصان بالمتغيرات المتقطعة .

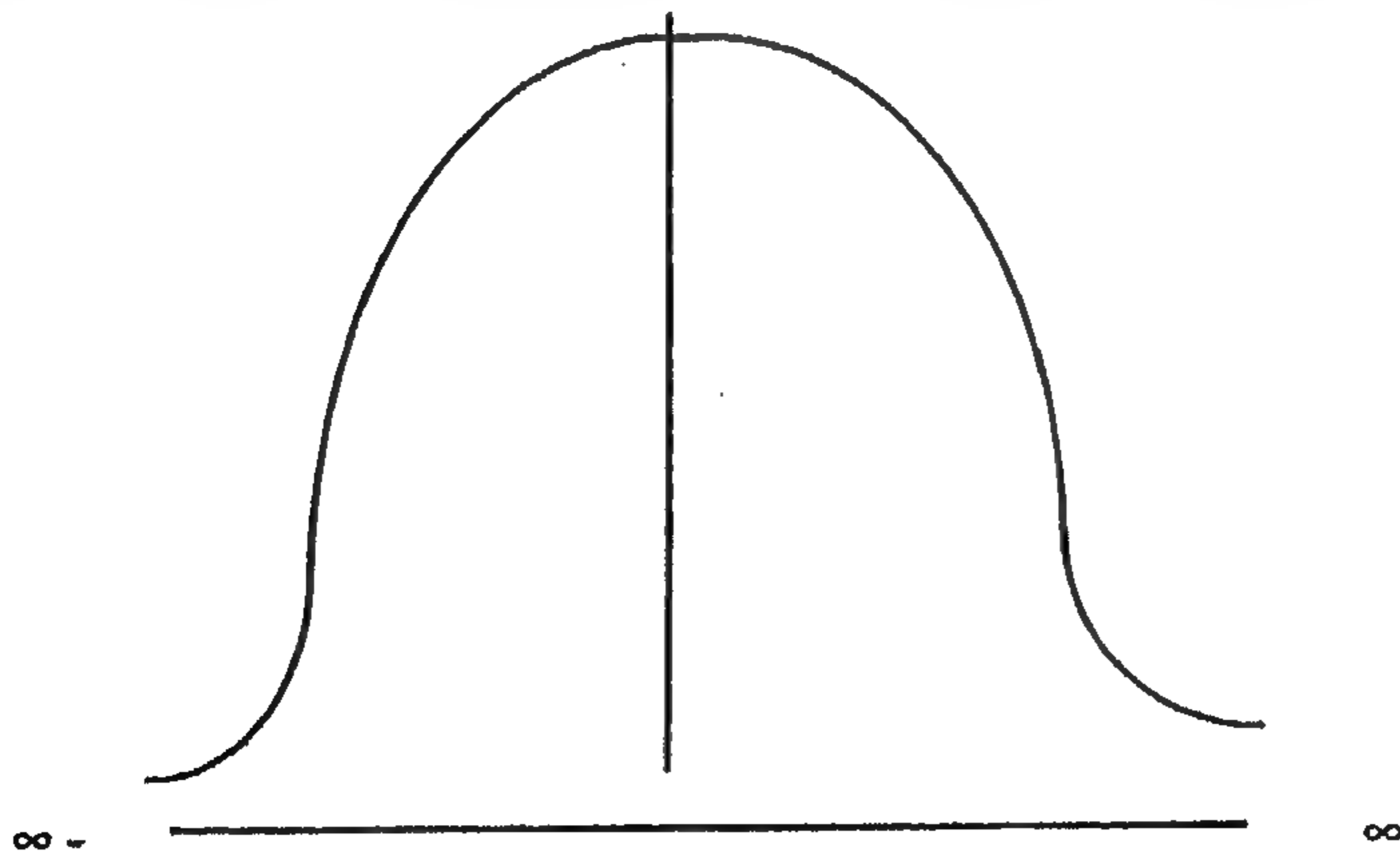
(2) يمكن التعبير عنه بالعلاقة الآتية :

$$Y = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2} \dots\dots\dots (A)$$

$$\sigma = \text{الانحراف المعياري} \quad e = 2.718$$

$$\mu = \text{المتوسط} \quad \pi = 3.14 \quad -\infty \leq x \leq \infty$$

والمنحنى الممثل للمعادلة (A) يسمى منحنى التوزيع الطبيعي وهو ناقوس الشكل ومتماثل من الجانبين وهذا المنحنى يوضح العلاقة بين قيم X والتكرار Y



وهناك معادلات خاصة يمكن من خلالها إيجاد المساحات الجزئية المختلفة تحت أى منحنى طبيعى بقيمة كل من μ و σ^2 وفى هذه الحالة يتطلب الأمر تطبيق معادلات معقدة لاستخراج هذه المساحات. وللتسهيل فإن الإحصائيين استتبطوا ما يطلق عليه منحنى التوزيع الطبيعى القياسى والتي يمكن لأى قيم تتوزع طبيعياً أن تنطبق على هذا التوزيع.

المنحنى الطبيعى القياسى Standard Normal Curve

استتبط الإحصائيون جداول إحصائية توضح المساحات تحت المنحنى لأجزاء تنحصر بين المتوسط الحسابى وقيمة X (قيمة Z) فى صورة احتمال لعشيرة تتوزع طبيعياً بمتوسط حسابى قدره صفر وانحراف قياسى يساوى 1 . ويطلق على هذا المنحنى المعبّر عن هذه العشيرة باسم المنحنى الطبيعى القياسى . ويتطلب منا ذلك تحويل جميع قيم (X) إلى ما يقابلها من قيم (Z) وهى قيم المتغير للمنحنى الطبيعى القياسى .

حيث X هى المفردات ، μ هى المتوسط الحسابى ، σ هى الانحراف المعيارى والمعادلة العامة للمنحنى الطبيعى القياسى هى :

$$F(x) = \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}(z)^2}$$

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

ومن خصائص التوزيع الطبيعي القياسي :

(1) وسطه الحسابي = صفر

(2) الانحراف المعياري = 1

(3) احتمال أن تقع Z بين ± 1.96 يساوي 0.95 أى

$$P(1.96 \geq z \geq -1.96) = 0.95$$

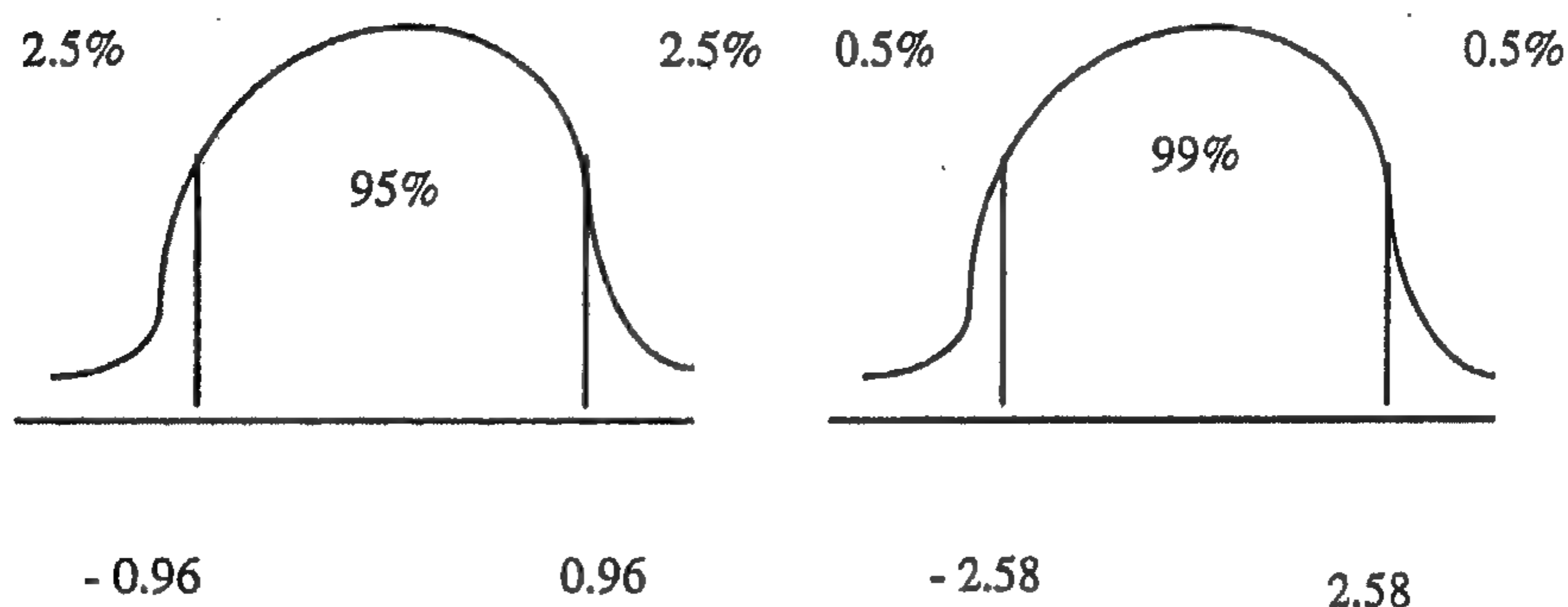
كذلك احتمال أن تقع Z بين ± 2.58 يساوي 0.99 أى

$$P(2.58 \geq z \geq -2.58) = 0.99$$

ومعنى ذلك أن 95 % من المساحة تحت المنحنى تقع بين $(Z = 1.96 , =$

$Z = -1.96)$ وأن 99 % من المساحة تحت المنحنى تقع بين $(Z = 2.58 , Z =$

$Z = -2.58)$ كما يتضح من الشكل :



(4) توجد جداول للمنحنى الطبيعي القياسي تعطى قيم $\Phi(Z)$ بالنسبة

لقيم Z الموجبة أما بالنسبة لقيم Z السالبة فتستخدم الخاصية رقم

(6) التالية :

(5) يمكن تحويل متغير عشوائى (X) له توزيع معتدل وسطه الحسابي μ

وانحرافه المعياري σ إلى متغير طبيعي قياسي وذلك بوضع

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

(6) نظراً لتمثل منحنى دالة كثافة الاحتمال للتوزيع المعتدل المعيارى فإن

$$\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$$

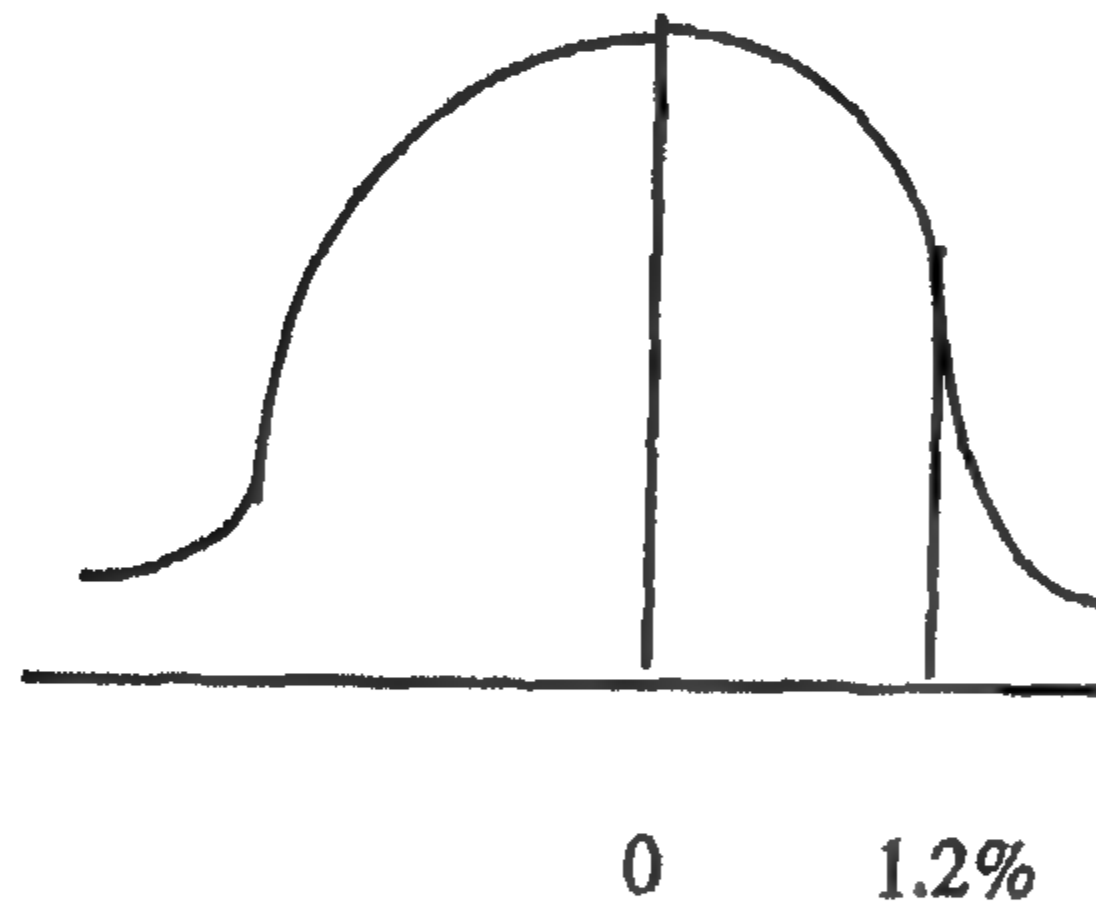
(7) المساحة تحت المنحنى لا تزيد عن الواحد الصحيح .

مثال : (33)

أوجد المساحة تحت المنحنى الطبيعى القياسى فى كلا من الحالتين الآتية

بين $Z = 0$ ، $Z = 1.2$

الحل :



من الجدول يتضح أن المساحة تساوى 0.3849

وحصلنا على هذا الرقم من خلال الكشف فى جدول Z

أمام 1.2 تحت الصفر فوجد أنها 0.8849

∴ المساحة المطلوبة = $0.5000 - 0.8849 = 0.3849$

مثال : (34)

متوسط أوزان 500 طالب فى أحد الكليات هو 151 كجم والانحراف القياسى 15 كجم وبفرض أن الأوزان تتوزع طبيعياً أوجد عدد الطلبة الذين ينحصر وزنهم بين :

(أ) $119.5 - 155.5$ كجم

(ب) أكبر من 185.5 كجم

الحل :

لإيجاد عدد الأفراد الذين ينحصر وزنهم بين $119.5 - 155.5$ كجم يتطلب ذلك تحويل هاتين القيمتين إلى ما يقابلهما من وحدات معيارية (Z)

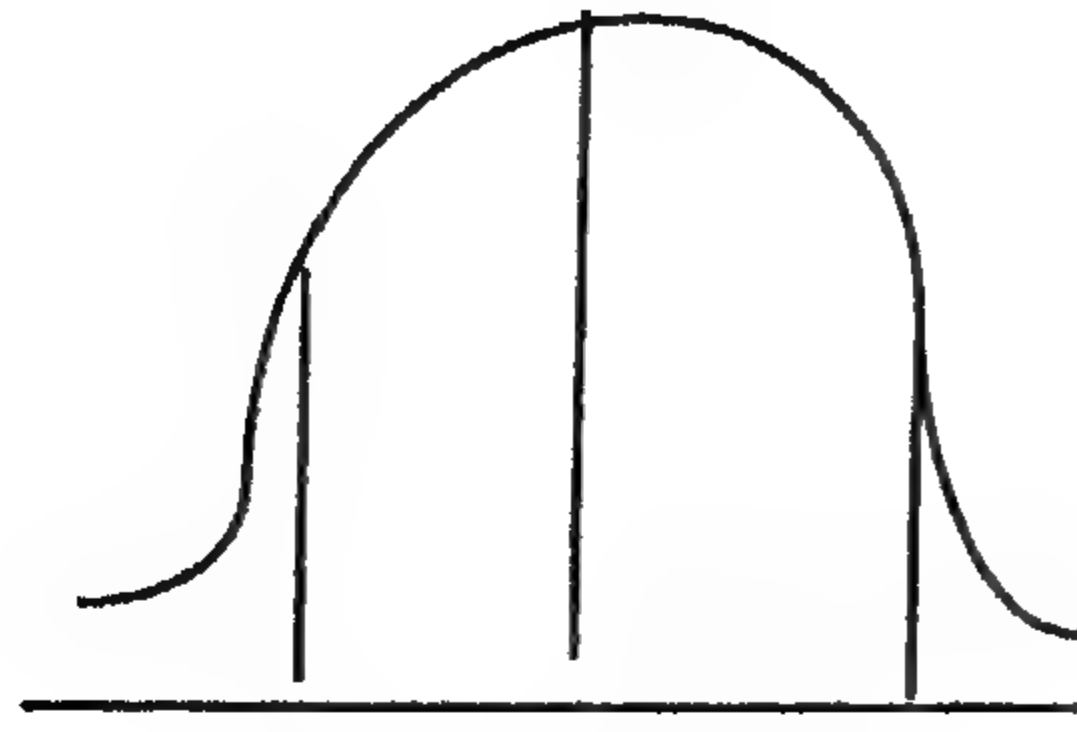
(أ) باستعمال المعادلة

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$Z_1 = \frac{119.5 - 151}{15} = -2.1$$

$$Z_2 = \frac{155.5 - 151}{15} = 0.3$$

نسبة الطلبة المطلوبة هى المساحة بين $Z = -2.1$, $Z = 0.3$



ويمكن التعبير عن ذلك بالمساحات

$$Z = -2.1 \text{ إلى الصفر}$$

$$Z = \text{صفر إلى } 0.3$$

$$-2.1\% \quad 0 \quad 0.3\%$$

ومن الجدول فإن المساحة الكلية هي $0.6 = 0.1179 + 0.4821$

∴ عدد الطلبة الذين تقع أوزانهم بين $119.5 - 155.2$ كجم

$$\text{هي } 0.6 \times 500 = 300 \text{ طالب.}$$

(ب) عدد الطلبة الذين يزيد وزنهم عن 185.5 كجم

$$185.5 - 151$$

$$Z = \frac{\quad}{15} = 2.3$$

$$15$$

ويمكن التعبير عن ذلك بالمساحة من $Z = 2.3$ إلى الصفر ومن

الجدول فهي تساوي 0.4892 . بينما المطلوب هو عدد الطلبة الذين يزيد

وزنهم عن 185.5 كجم أى الذى يزيدون عن قيمة المساحة بين $Z =$

$$\text{صفر إلى } Z = 2.3$$

$$\text{∴ المساحة} = 1 - 0.98928 = 0.01072$$

∴ عدد الطلبة الذين يزيد وزنهم عن 185.5 كجم =

$$200 \times 0.01072 = 2 \text{ طالبا تقريبا}$$

ملحوظة : حيث أن عدد الطلبة الذين ينحصر وزنهم بين 119.5

– 155.5 يساوى 300 طالب وبالتالى فإن عدد الطلبة الذين يزيد وزنهم

عن 185.5 كجم يكون بين الـ 200 طالب الباقين من المجموع الكلى

وهو 500 طالب .

تمارين

1- إذا كان احتمال ولادة الذكر = 0.5 احسب جميع الاحتمالات الخاصة بأسرة لديها 4 أطفال ، ثم احسب احتمال 3 أطفال إناث على الأقل .

2- إذا كانت نسبة النجاح فى مادة الرياضة لطلبة الفرق الأولى بكلية الزراعة سبا باشا هو 0.9 قدر احتمال أن خمسة من الطلبة يكونوا :

(أ) الكل ناجح (ب) على الأقل واحد ناجح

(ج) اثنان راسبان على الأكثر .

3- احتمال إنتاج وحدة معيبة فى إنتاج آلة معينة يساوى 0.02 فأوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لتوزيع الوحدات المعيبة فى مجموعة من 100 وحدة من إنتاج هذه الآلة .

4- أحد المصانع ينتج مصابيح كهربائية نسبة العيوب فيها 30% احسب احتمال أن يكون بعبوة مكونة من 100 مصباح .

(أ) صفر أو واحد أو اثنان معيبة (ب) أكثر من 5 معيبة

5- إذا كان احتمال إنتاج وحدة معينة من إنتاج آلة معينة يساوى 0.02. فأوجد احتمال أن تشتمل عينة مكونة من 100 من إنتاج هذه الآلة على .

(أ) أربعة وحدات معيبة (ب) وحدة واحدة معيبة على الأقل .

(استخدم توزيع بواسون)

أمثلة متنوعة على الاحتمالات

مثال : (1)

ما هو احتمال أن تسحب ورقة لعب من مجموعة كاملة من ورق اللعب تحمل رقم 8 وما هو احتمال الأوراق التي لا تحمل رقم 8 .

الحل :

عدد أوراق اللعب = 52 ورقة

عدد الأوراق التي تحمل رقم 8 = 4 ورقات

$$\therefore \text{احتمال أن تسحب ورقة لعب تحمل رقم 8} = \frac{4}{52}$$

احتمال أن الأوراق المسحوبة لا تحمل رقم 8 = 1 - 1 (ورقة تحمل رقم 8)

$$= 1 - \frac{4}{52} = \frac{48}{52}$$

مثال : (2)

أوجد عدد طرق سحب ورقتين من مجموعة كاملة من ورق اللعب

الحل:

عدد أوراق المجموعة الكاملة من ورق اللعب = 52

$$\therefore \text{عدد طرق اختيار ورقتان من 52 ورقة} = {}^{52}C_2 = \frac{52!}{2!50!}$$

$$51 \times 52$$

$$1326 = \frac{\text{طريقة}}{1 \times 2}$$

مثال : (3)

بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة كازابلانكا

الحل

عدد الأحرف الكلية للكلمة = 10 أحرف

عدد الأحرف المتشابهة = 4 أحرف متشابهة لحرف أ

$$\frac{10!}{4!} = \frac{10!}{4!} = \text{عدد الطرق المطلوبة}$$

$$= 151200 \text{ طريقة}$$

مثال : (4)

بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة زراعة

الحل :

يلاحظ أن عدد حروف هذه الكلمة هي 5 أحرف وليست بينها أحرف متشابهة .

$$\therefore \text{عدد الطرق المطلوبة} = 5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120 \text{ طريقة}$$

مثال : (5)

بكم طريقة يمكن جلوس 4 فتيات فى صف مستقيم

الحل :

$$\text{عدد الطرق} = 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24 \text{ طريقة}$$

مثال : (6)

بكم طريقة يمكن غرس 5 أشجار دائرياً حول منزل .

الحل :

$$\text{عدد الطرق} = (5 - 1)! = 4! = 24 \text{ طريقة .}$$

مثال : (7)

ألقيت ثلاث زهرات نرد احسب احتمال الحصول على مجموع 10.

الحل : المجموع 10 يمكن الحصول عليه من جمع الآتى :

| الطريقة | المجموع | الزهرة الثالثة | الزهرة الثانية | الزهرة الأولى |
|---------|---------|----------------|----------------|---------------|
| (1) | 10 | 1 | 3 | 6 |
| (2) | 10 | 2 | 2 | 6 |
| (3) | 10 | 1 | 4 | 5 |
| (4) | 10 | 2 | 3 | 5 |
| (5) | 10 | 3 | 3 | 4 |
| (6) | 10 | 2 | 4 | 4 |

الطريقة الأولى :

يمكن الحصول عليها من الثلاث زهرات بترتيب $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$

(لأنه لا توجد أرقام متشابهة على الثلاث زهرات)

الطريقة الثانية :

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

يمكن الحصول عليها من الثلاث زهرات بترتيب =

(لأنه يوجد رقمين متشابهين وهما 2 ، 2 ولذلك قسمنا على 2 !)

الطريقة الثالثة :

$$\frac{3!}{1!} = 6$$

يمكن الحصول عليها من الثلاث زهرات بترتيب =

الطريقة الرابعة :

$$\frac{3!}{1!} = 6$$

يمكن الحصول عليها من الثلاث زهرات بترتيب =

الطريقة الخامسة :

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

يمكن الحصول عليها من الثلاث زهرات بترتيب =

الطريقة السادسة :

$$\frac{3!}{1!} = 6$$

يمكن الحصول عليها من الثلاث زهرات بترتيب =

ومن ذلك يتضح أن عدد الطرق التي يمكن الحصول بها على مجموع = 10 هي :

$$27 = 3 + 3 + 6 + 6 + 3 + 6 \text{ طريقة}$$

عدد الأحداث الكلية لتجربة إلقاء ثلاث زهرات

$$216 = 6 \times 6 \times 6 = \text{حدث}$$

$$\therefore \text{احتمال الحصول على مجموع } 10 = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$$

مثال : (8)

صندوق يحتوى على 20 كرة حمراء ، 60 كرة بيضاء ، 40 كرة زرقاء ، 30 كرة سوداء أوجد :

أ - احتمال أن تسحب كرة واحدة حمراء أو بيضاء

ب- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة ليست حمراء أو بيضاء

ج- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة زرقاء

د - احتمال أن لا تكون الكرة المسحوبة زرقاء أو بيضاء أو حمراء

هـ- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة زرقاء أو بيضاء أو حمراء

الحل : يلاحظ أن إجمالى عدد الكور التى بالصندوق = 150 كرة

$$\text{ل (سحب كرة حمراء)} = \frac{20}{150}$$

$$\text{ل (سحب كرة بيضاء)} = \frac{20}{150}$$

$$\text{ل (سحب كرة زرقاء)} = \frac{20}{150}$$

$$\frac{20}{150} = \text{ل (سحب كرة سوداء)}$$

أ - احتمال أن تسحب كرة واحدة حمراء أو بيضاء

$$\frac{80}{150} = \frac{60}{150} + \frac{20}{150} =$$

ب - احتمال أن تكون الكرة المسحوبة غير حمراء أو بيضاء

$$\frac{70}{150} = \frac{80}{150} - 1 =$$

(لأن احتمال وقوع حدث معين + احتمال عدم وقوع هذا الحدث المعين = 1)

ج - احتمال أن تكون الكرة المسحوبة غير زرقاء

$$\frac{110}{150} = \frac{40}{150} - 1 =$$

هـ - احتمال أن تكون الكرة المسحوبة زرقاء أو بيضاء أو حمراء

$$\frac{120}{150} = \frac{20}{150} + \frac{60}{150} + \frac{40}{150} =$$

مثال : (9)

من المثال السابق أوجد :

أ - احتمال سحب 4 كرات الأولى حمراء والثانية بيضاء والثالثة زرقاء والرابعة سوداء (السحب بإرجاع).

ب - نفس المطلوب (أ) ولكن السحب بدون إرجاع.

ج- احتمال سحب 4 كرات الأولى سوداء والثانية زرقاء والثالثة بيضاء والرابعة حمراء (السحب بإرجاع) .

د - نفس المطلوب (ج) ولكن السحب بدون إرجاع

الحل :

أ - الاحتمال المطلوب = ل (حمراء) × ل (بيضاء) × ل (زرقاء) × ل (سوداء)

$$\frac{30}{150} \times \frac{40}{150} \times \frac{60}{150} \times \frac{20}{150} =$$

$$\text{ب- الاحتمال المطلوب} = \frac{30}{147} \times \frac{40}{148} \times \frac{60}{149} \times \frac{20}{150}$$

(يلاحظ أن السحب بدون إرجاع أى عندما نسحب الكرة الأولى وتكون حمراء ثم لا نرجعها وبالتالي فإن الكرة البيضاء سوف تتأثر بسحب الكرة الأولى الحمراء وهكذا) .

$$\text{ج - الاحتمال المطلوب} = \frac{20}{150} \times \frac{60}{150} \times \frac{40}{150} \times \frac{30}{150}$$

$$\text{ب- الاحتمال المطلوب} = \frac{20}{147} \times \frac{60}{148} \times \frac{40}{149} \times \frac{30}{150}$$

مثال : (10) مجموعة كاملة من ورق اللعب أوجد :

أ - احتمال سحب ورقتان آس (السحب بإرجاع وبدون إرجاع)

ب- احتمال سحب ولدين (السحب بإرجاع وبدون إرجاع)

الحل : يلاحظ أن عدد أوراق اللعب = 52 ورقة

عدد أوراق الآس = 13 ورقه

عدد الأولاد في الكوتشينة = 4 أولاد

$$\frac{13}{52} = \text{ل (سحب آس)}$$

$$\frac{4}{52} = \text{ل (سحب ولد)}$$

$$\frac{13}{52} \times \frac{13}{52} = \text{احتمال المطلوب في حالة السحب بإرجاع}$$

$$\frac{12}{51} \times \frac{13}{52} = \text{في حالة السحب بدون إرجاع}$$

(يلاحظ أن السحبة الثانية سوف تتأثر بالسحبة الأولى)

$$\frac{4}{52} \times \frac{4}{52} = \text{الاحتمال المطلوب في حالة السحب بإرجاع}$$

$$\frac{3}{51} \times \frac{4}{52} = \text{في حالة السحب بدون إرجاع}$$

مثال : (11)

إذا كان احتمال أن يعيش الزوج مدة 20 سنة بعد الزواج هو $\frac{3}{1}$ واحتمال حياة الزوجة بعد 20 سنة من الزواج هو $\frac{7}{2}$ أوجد :

أ- احتمال أن يعيشا سوياً مدة 20 سنة .

ب- احتمال أن يعيش الزوج وتتوفى الزوجة .

ج- احتمال أن تعيش الزوجة ويتوفى الزوج .

د- احتمال أن يتوفى الزوج والزوجة معاً .

الحل : يلاحظ أنه إذا كان احتمال الحياة للزوج هو $\frac{3}{1}$ فإن احتمال الوفاة له هو $\frac{3}{2}$ وكذلك إذا كان احتمال الحياة للزوجة هو $\frac{7}{2}$ فإن احتمال الوفاة لها هو $\frac{7}{5}$

(أ) احتمال أن يعيشا سوياً = ل (الحياة للزوج) \times ل (الحياة للزوجة) =

$$\frac{2}{21} = \frac{2}{7} \times \frac{1}{3}$$

(ب) احتمال أن يعيش الزوج وتتوفى الزوجة = ل (الحياة للزوج) \times ل (الوفاة للزوجة)

$$\frac{5}{21} = \frac{5}{7} \times \frac{1}{3} =$$

(ج) احتمال أن تعيش الزوجة ويتوفى الزوج = ل(الحياة للزوجة) × ل(الوفاة للزوج)

$$\frac{4}{21} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{7} =$$

(د) احتمال أن يتوفى الزوج والزوجة معاً = ل(الوفاة للزوج) × ل(الوفاة للزوجة)

$$\frac{10}{21} = \frac{5}{7} \times \frac{2}{3} =$$

وحيث أن هذه هي كل الاحتمالات الخاصة بهذين الحدثين أى يجب أن يكون مجموعها = 1 ويمكنك التحقق من ذلك .

مثال : (12)

يوجد ثلاث مزارع لإنتاج البطاطس المزرعة (أ) أنتجت 60 طن بطاطس جيدة و 40 طن مصابة ، ومزرعة (ب) أنتجت 80 طن بطاطس جيدة و 20 طن مصابة و مزرعة (ج) أنتجت 50 طن بطاطس جيدة و 50 طن مصابة. إذا أخذنا طن بطاطس من كل مزرعة أوجد :

أ - احتمال أن يكون الثلاثة طن بطاطس جيدة .

ب- احتمال أن يكون الثلاثة طن بطاطس مصابة .

ج- احتمال أن يكون الطن الأول جيد والثاني والثالث مصاب .

د - احتمال أن يكون الطن الأول والثاني جيد والثالث مصاب .

- هـ- احتمال أن يكون الطن الأول والثالث جيد والثاني مصاب .
و- احتمال أن يكون الطن الثاني والثالث جيد والأول مصاب .
ز- احتمال أن يكون الطن الثاني جيد و الأول والثالث مصاب .
ح- احتمال أن يكون الطن الثالث جيد والأول والثاني مصاب .

الحل : يلاحظ أن

الإنتاج الكلى للمزرعة (أ) = 60 + 40 = 100 طن

الإنتاج الكلى للمزرعة (ب) = 80 + 20 = 100 طن

الإنتاج الكلى للمزرعة (ج) = 50 + 50 = 100 طن

$$(أ) \text{ الاحتمال المطلوب} = \frac{50}{100} \times \frac{80}{100} \times \frac{60}{100} = 0.240$$

$$(ب) \text{ الاحتمال المطلوب} = \frac{50}{100} \times \frac{20}{100} \times \frac{40}{100} = 0.040$$

$$(ج) \text{ الاحتمال المطلوب} = \frac{50}{100} \times \frac{20}{100} \times \frac{60}{100} = 0.060$$

$$(د) \text{ الاحتمال المطلوب} = \frac{50}{100} \times \frac{80}{100} \times \frac{60}{100} = 0.240$$

$$0.060 = \frac{20}{100} \times \frac{50}{100} \times \frac{60}{100} = \text{الاحتمال المطلوب (هـ)}$$

$$0.160 = \frac{40}{100} \times \frac{50}{100} \times \frac{80}{100} = \text{الاحتمال المطلوب (و)}$$

$$0.160 = \frac{50}{100} \times \frac{40}{100} \times \frac{80}{100} = \text{الاحتمال المطلوب (ز)}$$

$$0.040 = \frac{20}{100} \times \frac{40}{100} \times \frac{50}{100} = \text{الاحتمال المطلوب (ح)}$$

مثال : (13)

إذا كان احتمال فوز الأهلي في مباراة ما هو 0.9 واحتمال فوز الزمالك هو 0.5 احسب احتمال فوز أحدهما على الأقل .

الحل : ل (فوز أحدهما على الأقل) = ل (فوز الأهلي) + ل (فوز

الزمالك)

– ل (فوزهما سوياً)

$$0.95 = 0.45 - 1.40 = 0.45 + 0.5 + 0.9$$

حل آخر: ل (فوز أحدهما على الأقل) = $1 - \text{ل (عدم فوز أى منهما)}$

$$0.95 = 0.05 - 1 = 0.5 \times 0.1 - 1 =$$

(يلاحظ أن ل (فوز النادى الأهلى) هو 0.9 ول (عدم فوزه) هو 0.1 وبالنسبة لنادى الزمالك فإن ل (الفوز) = ل (عدم الفوز) = 0.5

مثال : (14)

إذا كان احتمال نجاح طالب فى مادة الرياضة بكلية الزراعة هو 0.8. ما هى الاحتمالات المختلفة لنجاح 5 طلبة من عدمه .

الحل :

للإجابة على هذا التمرين سوف يستخدم توزيع ذو الحدين على اعتبار أن الحد الأول وهو يمثل احتمال النجاح وهو 0.8 والحد الثانى يمثل احتمال عدم النجاح وهو 0.2 وعدد الطلبة (ن) هو 5 .

$$\therefore {}^5(0.2) {}^3(0.8) \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + {}^1(2) {}^4(0.8) \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + {}^5(0.8) = {}^5(0.2 + 0.8)$$

$$+ {}^5(0.2) + {}^4(0.2) (0.8) \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} + {}^3(0.2) {}^2(0.8) \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} +$$

حيث ${}^5(0.8)$ تشير إلى احتمال نجاح الخمس طلاب ،

$${}^1(2) {}^4(0.8) \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ تشير إلى احتمال نجاح 4 طلبة ورسوب طالب واحد ،}$$

$$(0.8)^3 (0.2)^2 \text{ تشير إلى احتمال نجاح 3 ورسوب 2 ، } \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(0.8)^2 (0.2)^3 \text{ تشير إلى احتمال نجاح 2 ورسوب 3 ، } \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$(0.8) (0.2)^4 \text{ تشير إلى احتمال نجاح طالب واحد ورسوب 4 ، } \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$(0.2)^5$ تشير إلى عدم نجاح أحد وحيث أن هذه هي كل الاحتمالات الممكنة لهذا الحادث فإن مجموعها يجب أن يكون مساوياً الواحد الصحيح (تأكد من ذلك) .

مثال : (15)

في عائلة مكونة من 4 أفراد أوجد :

أ - احتمال أن يكونوا ذكور

ب - احتمال وجود 2 ذكور

ج - احتمال وجود ذكر واحد على الأكثر

د - احتمال وجود ذكر واحد على الأقل

هـ - احتمال وجود ذكر وأنثى على الأقل

الحل : يلاحظ هنا أنه إذا رمزنا للذكر بالرمز (ذ) وللأنثى بالرمز (ث) فإن

$$ل (ذ) = ل (ث) = 2/1 \text{ وأن توزيع ذو الحدين يكون على الصورة}$$

$$^4(ذ) + ^4(ث + ذ) + ^3(ذ) (ث) + ^3(ث) (ذ) + ^2(ذ)^2(ث) + ^2(ث)^2(ذ) + ^1(ذ)^3(ث) + ^1(ث)^3(ذ) + ^0(ذ)^4(ث) + ^0(ث)^4(ذ)$$

وبالتعبير عن ذ = ث = 2/1

$$(أ) \text{ احتمال أن يكون 4 أفراد ذكور} = ^4(ذ) = ^4(2/1) = 16/1$$

$$(ب) \text{ احتمال وجود 2 ذكور} = ^2(ذ)^2(ث) = ^2(2/1)^2(2/1) = 16/6$$

(ج) احتمال وحول وجود ذكر واحد على الأكثر = ل (وجود ذكر واحد و3 إناث) + ل (عدم وجود ذكر أى الكل إناث)

$$= ^1(ذ)^3(ث) + ^3(ث)^1(ذ) =$$

$$= ^1(2/1) + ^3(2/1) =$$

$$16/5 = 16/1 + 16/1 \times 4 =$$

(د) احتمال وجود ذكر واحد على الأقل = ل (وجود ذكر) + ل (وجود ذكرين) + ل (وجود 3 ذكور) + ل (وجود 4 ذكور)

$$\begin{aligned}
& {}^4(\text{ذ}) + {}^3(\text{ث}) \binom{4}{3} + {}^2(\text{ث}) {}^2(\text{ذ}) \binom{4}{2} + {}^3(\text{ث}) {}^1(\text{ذ}) \binom{4}{1} = \\
& {}^4(2/1) + (2/1) {}^3(2/1) \binom{4}{3} + {}^3(2/1) {}^2(2/1) \binom{4}{2} + {}^2(2/1) (2/1) \binom{4}{1} = \\
& 16/15 = 16/1 + 16/1 \times 4 + 16/1 \times 6 + 16/1 \times 4 =
\end{aligned}$$

أو حل آخر:

$$\begin{aligned}
& \text{ل (وجود ذكر واحد على الأقل)} = 1 - \text{ل (عدم وجود إناث)} \\
& \frac{15}{16} = \frac{1}{16} - 1 = {}^4(\text{ذ}) - 1 =
\end{aligned}$$

ملحوظة :

في حالة توزيع ذو الحدين وكان $p = q = \frac{1}{2}$ فإن احتمال الحصول على 4 ذكور

في عائلة مكونة من 4 أفراد يساوي احتمال الحصول على 4 إناث في نفس العائلة لأن احتمال الذكر يساوي احتمال الأنثى .

مثال : (16)

أوجد مفكوك (س + 3 ص)⁴

الحل :

$$\text{(س + 3 ص)}^4 = \text{س}^4 + {}^3(\text{س}) {}^1(3 \text{ ص}) \binom{4}{1} + {}^2(\text{س}) {}^2(3 \text{ ص}) \binom{4}{2}$$

$$+ \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} (س) (3 ص)^3 + (3 ص)^4 = 108 س ص^3 + 81 ص^4$$

مثال : (17)

أوجد الحد الأوسط فى مفكوك $(س + 3 ص)^4$

الحل :

حيث أن ن عدد زوجى يساوى 4 فإن عدد الحدود = $ن + 1 = 5$

$$\text{وترتيب الحد الأوسط} = \left(1 + \frac{ن}{2}\right) = \left(1 + \frac{4}{2}\right) = 3$$

أى الحد الثالث $ح = 3 = 1+2$

وعليه فإن $(ر = 2)$ ومن القانون الخاص

$$\text{بذلك نجد أن } ح = 1+2 = \left[\frac{1}{2}\right] (س) (3 ص)^2 = 54 س ص^2$$

ملحوظة : لإيجاد الحد رقم كذا نطبق القانون

$$ح = 1 + \left[\frac{ر}{ن}\right] س ص^{\text{ن}-ر}$$

مثال: (18)

إذا كان احتمال إنتاج وحدة معيبة فى إنتاج آلة معينة يساوى

01. أوجد احتمال أن تشمل عينة من 1000 وحدة من إنتاج هذه الآلة

على :

(أ) 2 وحدة معيبة (ب) وحدة واحدة معيبة على الأقل

الحل :

حيث أن u صغيرة جداً ، n كبيرة جداً فيحسن استخدام توزيع بواسون نظراً لسهولة بالمقارنة بتوزيع ذات الحدين .

$$P(x) = \frac{e^{-u} u^x}{x!} = \frac{e^{-u} u^x}{x!}$$

حيث (u) عبارة عن ثابت إحصائي معين وهى قيمة نظرية تمثل متوسط (x) ، e رقم ثابت يساوى 2.718 تقريباً

$x = 1, 2, 3, \dots$ متغير متقطع

يلزم إيجاد المتوسط $\mu = n \lambda = 10 = 1000 \times 0.01$

$$P(2) = \frac{e^{-10} 10^2}{2!} = \frac{(2.817)^{-10} (10)^2}{2!} = 0.0016$$

$$\begin{aligned} P(1 \text{ at least}) &= 1 - P(0) \\ &= 1 - \frac{(2.718)^{-10} (10)^{\text{zero}}}{\text{zero}!} \\ &= 0.999968 \end{aligned}$$

مثال : (19)

إذا كان احتمال إنتاج وحدة معيبة من إنتاج آلة معينة تساوى 0.05 فأوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لتوزيع الوحدات المعيبة فى مجموعة من 1000 وحدة من إنتاج هذه الآلة .

الحل :

$$1000 = n \quad 0.05 = p_1 \quad 0.95 = p_2$$

الوسط الحسابي = $n \cdot p_1 = 1000 \times 0.05 = 50$ وحدة .

$$6.89 = \sqrt{0.95 \times 0.05 \times 1000} = \sqrt{n \cdot p_1 \cdot p_2}$$

مثال : (20)

في أحد مزارع البطاطس وجد أن معدل الإصابة بمرض العفن البنى هو 30% فإذا فحصت 6 طن بطاطس ما هي الاحتمالات المختلفة للإصابة من عدمه .

الحل :

من الممكن التعبير رياضياً عن قيمة الاحتمالات المختلفة للأحداث على أساس مفكوك ذات الحدين حيث يكون احتمال الإصابة 0.30 واحتمال عدم الإصابة 0.70 ويعبر عن ذلك بمفكوك المعادلة :

$$\begin{aligned} &= {}^6(0.7 + 0.3) \\ &= {}^3(0.3) \left[\frac{6}{3} \right] + {}^2(0.7) {}^4(0.3) \left[\frac{6}{2} \right] + (0.7) {}^5(0.3) \left[\frac{6}{1} \right] + {}^6(0.3) = \\ &{}^6(0.7) + {}^5(0.7) (0.3) \left[\frac{6}{5} \right] + {}^4(0.7) {}^2(0.3) \left[\frac{6}{4} \right] + {}^3(0.7) \end{aligned}$$

ويعبر عن جميع الاحتمالات فى الجدول التالى

| الاحتمال | قيمة الاحتمال |
|---|---------------|
| 1- احتمال 6 طن مصابة $= (0.3)^6$ | 0.0008 |
| 2- احتمال 5 طن مصابة وواحد غير مصاب = $(0.3)^5 (0.7) \left[\frac{6}{1} \right]$ | 0.0105 |
| 3- احتمال 4 طن مصابة و2 طن غير مصابة = $(0.3)^4 (0.7)^2 \left[\frac{6}{2} \right]$ | 0.0594 |
| 4- احتمال 3 طن مصابة و3 طن غير مصابة = $(0.3)^3 (0.7)^3 \left[\frac{6}{3} \right]$ | 0.1852 |
| 5- احتمال 2 طن مصابة و4 غير مصابة = $(0.3)^2 (0.7)^4 \left[\frac{6}{1} \right]$ | 0.3241 |
| 6- احتمال 1 طن مصاب والباقي غير مصاب = $(0.3)^1 (0.7)^5 \left[\frac{6}{1} \right]$ | 0.3025 |
| 7- احتمال عد الإصابة $= (0.7)^6$ | 0.1175 |
| مجموع الاحتمالات | 1.000 |

مثال : (21)

عند رمى زهرتى نرد ما هو احتمال ظهور المجموع 7 أو المجموع 11

الحل : الحادث هنا يتكون من حادثين .

نفرض أن (أ₁) هو ظهور المجموع 7 ويتكون من الأحداث (1) ،
(6) ، (1 ، 6) ، (5 ، 2) ، (2 ، 5) ، (3 ، 4) ، (4 ، 3)

$$\therefore \text{ح (أ}_1\text{)} = \frac{6}{36}$$

وأن (ب) هو ظهور المجموع 11 ويتكون من الأحداث (5 ، 6) ،
(6 ، 5)

$$\therefore \text{ح (ب)} = \frac{2}{36}$$

$$\therefore \text{ح (أ ، ب)} = \text{ح (أ)} + \text{ح (ب)}$$

$$\frac{8}{36} = \frac{2}{36} + \frac{6}{36} =$$

مثال : (22)

ما هو احتمال ظهور المجموع 10 على الأقل عند إلقاء زهرتين من
زهرات النرد.

الحل :

نفترض أن أ ، ب ، ج عبارة عن حوادث الحصول على المجموع
10 ، 11 ، 12 على الترتيب .

ح (أ) = احتمال ظهور المجموع 10

$$\frac{3}{36} = \frac{\text{عدد مرات ظهور المجموع 10}}{\text{عدد المرات جميعها}} =$$

ح (ب) = احتمال ظهور المجموع 11

$$\frac{2}{36} = \frac{\text{عدد مرات ظهور المجموع 11}}{\text{عدد المرات جميعها}} =$$

ح (ج) = احتمال ظهور المجموع 12

$$\frac{1}{36} = \frac{\text{عدد مرات ظهور المجموع 12}}{\text{عدد المرات جميعها}} =$$

ح (أ أو ب أو ج) = ح (أ) + ح (ب) + ح (ج)

$$\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

مثال : (23)

صندوق به 25 رقم منهم خمسة فقط لهم الحق فى الحصول على جوائز فما هو احتمال سحب رقمين لجائزين فى المراتين المتتاليتين .

الحل :

نفرض أن حادث الحصول على جائزة فى السحب الأول هو (أ)
وحادث الحصول على جائزة فى السحب الثانى هو (ب) وبتطبيق قاعدة
ضرب الاحتمالات وهى :

$$\begin{aligned} & \text{ح (أ ، ب)} = \text{ح (أ)} \times \text{ح (ب / أ)} \\ & \frac{5}{24} = \text{ح (ب) ، } \frac{4}{25} = \text{ح (أ)} \\ & \therefore \text{ح (أ ، ب)} = \frac{4}{24} \times \frac{5}{25} = \frac{1}{30} \end{aligned}$$

واضح أن قيمة ح (ب / أ) = $\frac{4}{24}$ حيث أنه فى السحبة الأولى ظهر رقم ما

لجائزة وبالتالى فإن عدد أرقام الجوائز أصبح 4 فقط والعدد الكلى 24
مثال : (24)

مجموعة كاملة من أوراق اللعب سحب منها ورقة على مرتين
متتاليتين فما هو احتمال أن تكون الورقتان المسحوبتان ولد وذلك فى
حالة :

(1) السحب بإحلال مرة

(2) السحب بدون إحلال مرة أخرى

الحل . (1) السحب بإحلال معناه أن الورقة المسحوبة هي المرة الأولى يتم إرجاعها إلى مجموعة ورق اللعب قبل السحبة الثانية فإذا رمزنا للسحبة الأولى بالرمز (أ) وللسحبة الثانية بالرمز (ب) فإن :

$$\frac{4}{52} = \frac{\text{عدد الأولاد}}{\text{مجموعة ورق اللعب كلها}} = \text{ح (أ)}$$

$$\frac{4}{52} = \frac{\text{عدد الأولاد}}{\text{مجموعة ورق اللعب كلها}} = \text{ح (ب)}$$

$$\text{ح (أ ، ب)} = \text{ح (أ)} \times \text{ح (ب)}$$

$$\frac{1}{16} = \frac{4}{52} \times \frac{4}{52}$$

$$169 = 2704 \times 52 \times 52$$

(2) السحب بدون إحلال معناه أن السحبة الأولى سوف لا يتم إرجاعها إلى مجموعة ورق اللعب وبالتالي فإن السحبة الثانية سوف تتأثر بنتيجة السحبة الأولى وأن عدد الأولاد سوف يصبح 3 بدلاً من 4 وعدد ورق اللعب سوف يصبح 51 بدلاً من 52 وعليه فإن :

$$\frac{3}{51} = \text{ح (أ/ب)} , \frac{4}{25} = \text{ح (أ)}$$

$$ح(أ، ب) = ح(أ) \times ح(ب/أ)$$

$$\frac{1}{221} = \frac{12}{2652} = \frac{3}{51} \times \frac{4}{52} =$$

مثال : (25)

بفرض أن احتمال الحصول على مولود ذكر = $\frac{1}{2}$ أوجد الاحتمال بالنسبة لعائلة مكونة من 6 أطفال إذا علمت :

(1) أن جميع الأطفال من نفس الجنس .

(2) أن خمسة أطفال ذكور وأنثى واحدة .

الحل :

(1) نفرض حادث الحصول على جميع الأطفال ذكور هو (أ₁) والرمز

(أ₂) لحادث الحصول على جميع الأطفال إناث .

وحيث أن (أ₁ ، أ₂) من الحوادث المانعة فإن :

$$ح(أ_1، أ_2) = ح(أ_1) \times ح(أ_2)$$

وحيث أن المواليد الستة تعتبر حوادث مستقلة بالنسبة لجنس كل طفل ،

فإنه يمكن استخدام المعادلة :

$$ح(أ_1، أ_2) = ح(أ_1) \times ح(أ_2)$$

لأكثر من حادثين وعليه يكون :

$$ح(أ_1) = احتمال أن المواليد الستة ذكور =$$

$$6(1/2) = 1/2 \times 1/2 \times 1/2 \times 1/2 \times 1/2 \times 1/2$$

$$\text{وبالمثل ح (أ2) = احتمال أن المواليد الستة إناث} = {}^6(1/2) \\ \frac{1}{32} = \frac{2}{64} = {}^6(1/2) + {}^6(1/2) = \text{ح (أ1 ، أ2)} \\ \therefore \frac{1}{32} = \frac{2}{64}$$

$$(2) \dots \text{احتمال الذكر} - \text{احتمال الأنثى} = (1/2)$$

$$\therefore \text{ح (5 ذكور وأنثى)} = \text{ح (5 إناث وذكور)} = \text{ح (6 ذكور)} = {}^6(1/2)$$

مثال : (26)

ما هو احتمال الحصول على خمسة أوراق تريل من مجموعة كاملة من ورق اللعب عددها 52 ورقة

الحل : عدد طرق سحب خمسة أوراق المجموعة كلها = ${}^{52}C_5$

$$48 \times 49 \times 50 \times 51 \times 52$$

$$\frac{\quad}{\quad} =$$

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$$

عدد طرق سحب خمسة أوراق تريل = ${}^{13}C_5$

$$9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13$$

$$\frac{\quad}{\quad} =$$

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$$

وحيث أن عدد الأوراق التريل فى المجموعة الكاملة 13 ورقة

$${}^{13}C_5$$

\therefore احتمال سحب خمسة أوراق تريل =

$$\frac{{}^{13}C_5}{{}^{52}C_5}$$

$$0.005 = \frac{9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13}{48 \times 49 \times 50 \times 51 \times 52} =$$

مثال : (27)

قائمة بعدد 20 متطوعاً للتبرع بالدم منهم 15 فرداً دمهم من فصيلة B فإذا أخذنا عينة عشوائية من ثلاثة أشخاص فما هو احتمال :

(1) أن الثلاثة من فصيلة B .

(2) أن اثنين من فصيلة B وواحد من أى فصيلة أخرى .

(3) أن واحد على الأقل من فصيلة B .

الحل: العدد الكلى للنتائج الممكنة هو عبارة عن عدد طرق اختيار الثلاثة أفراد من المجموعة كلها والتي عددها 20 هو ${}^{20}C_3$

وعدد الطرق المقابلة للحادث الثلاثة من فصيلة الدم B هو ${}^{15}C_3$

$$\therefore \text{الاحتمال المطلوب} = \frac{{}^{15}C_3}{{}^{20}C_3} = \frac{13 \times 14 \times 15}{18 \times 19 \times 20} = 0.40$$

(2) عدد الطرق المقابلة للحادث المطلوب هو عدد طرق اختيار فردين من

فصيلة الدم B وفرد من أى فصيلة دم أخرى وذلك نحصل عليه من

القانون ${}^{15}C_2 \times {}^5C_1$

$${}^{15}C_2 \times {}^5C_1$$

$$\frac{{}^{15}C_2 \times {}^5C_1}{{}^{20}C_2} = \text{ويكون الاحتمال المطلوب}$$

$$0.46 = \frac{2 \times 3 \times 4 \times 13 \times 14 \times 15}{18 \times 19 \times 20} =$$

(ج) احتمال أن فرداً واحداً على الأقل من فصيلة الدم B يعنى أن فرداً واحداً من فصيلة دم B وفردان من فصيلة دم أخرى ، أو فردين من فصيلة دم B وفرد واحد من فصيلة دم أخرى أو ثلاثة أفراد من فصيلة دم B ، أى أن الحادث الوحيد غير المطلوب هو ظهور 3 أفراد من فصيلة ليست فصيلة الدم B أى :

الاحتمال المطلوب = 1 - احتمال أن الثلاثة من فصيلة دم ليست B

$$= 1 - \frac{3^5}{3^{20}} - 1 = \frac{3 \times 4 \times 5}{18 \times 19 \times 20} - 1 = \frac{113}{114} = 0.99$$

مثال : (28)

إذا كان احتمال أن يتخرج طالب من كلية الزراعة هو 0.6 وإذا كان لدينا 7 طلاب أوجد :

- (1) احتمال أن يتخرج طالب واحد فقط
- (2) احتمال أن يتخرج طالب واحد على الأقل
- (3) احتمال أن يتخرج 5 طلاب على الأكثر
- (4) احتمال أن لا يتخرج أحد

الحل :

احتمال التخرج = 0.6

احتمال عدم التخرج (ل) = $1 - 0.6 = 0.4$

عدد الطلاب (ن) = 7

يمكن الحصول على الاحتمالات المطلوبة من مفكوك ذات الحدين
كالاتى :

$$+ {}^3(0.4) {}^5(0.6) {}^7_2 + {}^1(0.4) {}^6(0.6) {}^7_1 + {}^7(0.6) = {}^7(0.4 + 0.6) \\ {}^4(0.6) {}^3_3$$

$${}^1(0.6) {}^6_6 + {}^5(0.4) {}^2(0.6) {}^7_5 + {}^4(0.4) {}^3(0.6) {}^7_4 + {}^3(0.4) \\ {}^7(0.4) + {}^6(0.4)$$

(1) احتمال أن يتخرج طالب واحد فقط =

$$0.107 = {}^6(0.4) {}^1(0.6) {}^7_1$$

(2) احتمال أن يتخرج طالب واحد على الأقل = $1 -$ احتمال ألا يتخرج
أحد

$${}^7(0.4) {}^0(0.6) {}^7_0 - 1 =$$

$$0.9984 = 0.0016 - 1 =$$

(3) احتمال أن يتخرج 5 طلبة على الأكثر عبارة عن

$${}^7_3 + {}^5(0.4) {}^2(0.6) {}^7_2 + {}^6(0.4) {}^1(0.6) {}^7_1 + {}^7(0.4) {}^0(0.6) {}^7_0 \\ {}^4(0.4) {}^3(0.6)$$

$$0.261 = {}^5(0.4) {}^2(0.6) {}^7_5 + {}^5(0.4) {}^2(0.6) {}^7_4 +$$

الفصل الثامن

الأرقام القياسية

Index Numbers

تمهيد :

تعتبر الأرقام القياسية وسيلة من الوسائل الإحصائية الهامة لقياس التغيرات النسبية التي تحدث لكثير من الظواهر الاقتصادية أو التجارية أو الإدارية أو الاجتماعية مثل التغيرات فى أسعار السلع والخدمات المنتجة والصادرات والواردات والأجور وغير ذلك من الظواهر، بالنسبة إلى فترتين زمنيتين مختلفتين أو مكانين مختلفين . ويعتبر قياس التغير فى هذه الظواهر من الأمور الهامة للتعرف على الظروف الاقتصادية للدولة ، وبالتالي رسم الخطط والسياسات الملائمة للتغير فى هذه الظواهر حتى لا يتأثر اقتصاد الدولة بهذه التغيرات .

ويعرف الرقم القياسى بأنه مقياس نسبى يقيس التغير فى ظاهرة ما خلال فترتين زمنيتين أو مكانين مختلفين وتسمى الفترة الزمنية الأولى السابقة للفترة الزمنية الثانية بأسم فترة الأساس فى حين تسمى الفترة الزمنية الثانية بأسم فترة المقارنة ، وكذلك الحال بالنسبة للمكان .

ويجب أن تتميز فترة الأساس التى تم اختيارها بالاستقرار الاقتصادى وخالية من الظروف أو العوامل غير الملائمة مثل الحروب والأزمات الاقتصادية والتى قد تؤثر على الظاهرة موضع البحث والدراسة . ونفس الحال بالنسبة لمكان الأساس فيجب أن يكون له أهمية خاصة بالنسبة للظاهرة .

وتأخذ الأرقام القياسية صوراً متعددة منها الرقم القياسى لنفقة المعيشة (أسعار المستهلكين) والرقم القياسى لأسعار الجملة والرقم القياسى للإنتاج الصناعى والزراعى وللحاصلات الزراعية وغير ذلك من الأرقام القياسية . وتعتبر الأرقام القياسية للأسعار والكميات من أكثر

الأرقام القياسية استخداماً في الحياة وهي التي سوف تقتصر دراستنا عليها .

ويلاحظ أن الأسس والقواعد التي تراعى عند تركيب الرقم القياسي للأسعار هي نفس الأسس والقواعد التي تستخدم في تركيب الأرقام القياسية الأخرى .

أنواع الأرقام القياسية :

يتم تركيب الرقم القياسي للأسعار باستخدام إحدى الصور الآتية :

أولاً : الرقم القياسي البسيط :

1- الرقم القياسي البسيط للأسعار (منسوب السعر) :

Simple Index Number

وهو أبسط أنواع الأرقام القياسية ويحسب من خلال قسمة سعر السلعة في سنة المقارنة (1ع) على سعرها في سنة الأساس (0ع) كالآتي :

$$\text{الرقم القياسي البسيط للأسعار} = \frac{1\text{ع}}{0\text{ع}} \times 100$$

مثال : إذا كان سعر السلعة في سنة 1995 هو 30 جنيهاً وسعرها في سنة 1998 هو 35 جنيهاً احسب الرقم القياسي البسيط للأسعار (منسوب السعر) في سنة 1998 بالنسبة لسنة 1995 .

الحل : الرقم القياسي البسيط للأسعار أو منسوب السعر

$$= \frac{\text{سعر السلعة فى سنة المقارنة (1998)}}{\text{سعر نفس السلعة فى سنة الأساس (1995)}} \times 100$$

$$= 100 \times \frac{35}{30} = 116.67\%$$

أى أن سعر السلعة فى سنة 1998 زاد بنسبة 16.76% عن سعرها فى سنة 1995.

2- الرقم القياسى البسيط للكميات :

ويمكن الحصول عليه من الصيغة التالية :

$$\text{الرقم القياسى البسيط للكميات} = \frac{\text{الكمية فى سنة المقارنة}}{\text{الكمية فى سنة الأساس}} \times 100$$

$$= 100 \times \frac{K_1}{K_0}$$

3- الرقم القياسى البسيط للقيمة :

ويمكن الحصول عليه من الصيغة التالية :

$$\text{الرقم القياسى البسيط للقيمة} = \frac{\text{القيمة فى سنة المقارنة}}{\text{القيمة فى سنة الأساس}} \times 100$$

$$100 \times \frac{ق1}{ق0} =$$

وحيث أن القيمة = السعر × الكمية أى ق1 = ع1 ك1

$$ق0 = ع0 ك0$$

$$\therefore \text{الرقم القياسى للقيمة} = 100 \times \frac{ع1 ك1}{ع0 ك0}$$

مثال : البيانات التالية تمثل الأسعار والكميات من أحد السلع خلال الفترة 1996 – 2000 .

| الكمية | السعر | السنوات |
|--------|-------|---------|
| 100 | 10 | 1996 |
| 120 | 12 | 1997 |
| 140 | 14 | 1998 |
| 160 | 15 | 1999 |
| 180 | 17 | 2000 |

والمطلوب حساب الأرقام القياسية البسيطة للأسعار والكميات والقيمة لهذه السلعة باعتبار أن سنة 1996 سنة أساس .

الحل :

| السنوات | منسوب السعر (%) | منسوب الكمية (%) | القيمة | منسوب القيمة (%) |
|---------|--------------------|---------------------|--------|---------------------|
| 1996 | 100 | 100 | 1000 | 100 |
| 1997 | 120 | 120 | 1560 | 156 |
| 1998 | 140 | 140 | 1960 | 196 |
| 1999 | 150 | 160 | 2400 | 240 |
| 2000 | 170 | 180 | 3060 | 306 |

من الجدول السابق يلاحظ أن سعر السلعة في سنة 2000 زاد بنسبة 70% عما كانت عليه في سنة 1996 ، بينما كمية السلعة في سنة 2000 زادت بنسبة 80% عما كانت عليه في سنة 1996 . أما قيمة السلعة في سنة 2000 فقد زادت بنسبة 206% عما كانت عليه في سنة 1996 .

ثانياً : الأرقام القياسية التجميعية البسيطة

Simple Aggregative Index Numbers

تتيح لنا هذه الطريقة لحساب الرقم القياسي المقارنة بين أسعار مجموعة من السلع في سنة المقارنة مع سنة الأساس ، ونفس الحال بالنسبة للكميات وللقيم .

(أ) الرقم القياسي التجميعي للأسعار :

$$\text{الرقم التجميعي البسيط للأسعار} = \frac{\text{مجموع أسعار سنة المقارنة}}{\text{مجموع أسعار سنة الأساس}} \times 100$$

$$100 \times \frac{\text{مجموع } 1}{\text{مجموع } 0} =$$

(ب) الرقم القياسى التجميعى المرجح

Weighted Aggregative Index Numbers

تستخدم الأرقام القياسية التجميعية المرجحة للتغلب على عيب الرقم القياسى التجميعى البسيط وهو تجاهل الأهمية النسبية للسلع المختلفة ، ولذلك فإننا نرجح أسعار كل سلعة بالكمية المباعة منها . وقد يتم ترجيح الأسعار بكميات سنة الأساس (ك₀) أو بكميات سنة المقارنة (ك₁) كالتالى :

1- الرقم القياسى المرجح بكميات سنة الأساس :

يرجع اشتقاق هذا الرقم إلى لاسبير Laspeyres والمعادلة الرياضية الخاصة برقم لاسبير هي :

$$\text{رقم لاسبير} = 100 \times \frac{\text{مجموع } 1 \text{ ك}}{\text{مجموع } 0 \text{ ك}}$$

2- الرقم القياسى المرجح بكميات سنة المقارنة :

يرجع اشتقاق هذا الرقم إلى باش Paasche والمعادلة الرياضية الخاصة به هي :

$$\text{رقم باش} = 100 \times \frac{\text{مجموع } 1 \text{ ك}}{\text{مجموع } 0 \text{ ك}}$$

3- رقم دروبش وبالي القياسى Drobish Index

وهو يعبر عن الوسط الحسابى لكل من رقم لاسبير ورقم باش

$$\text{رقم دروبش وبالي} = 100 \times \frac{\frac{\text{مجموع 1 ك} + \text{مجموع 0 ك}}{2}}{\frac{\text{مجموع 1 ع} + \text{مجموع 0 ع}}{2}}$$

4- رقم فيشر القياسى Fisher Index

وهو يعبر عن الوسط الهندسى لكل من رقم لاسبير ورقم باش

$$\text{الرقم القياسى لفيشر} = \sqrt{100 \times \frac{\text{مجموع 1 ك}}{\text{مجموع 1 ع}} \times \frac{\text{مجموع 0 ك}}{\text{مجموع 0 ع}}}$$

5- رقم مارشال- إدجورث المثالى Edgeworth Index

ويعبر عنه بالصورة الرياضية التالية :

$$\text{رقم مارشال- إدجورث} = 100 \times \frac{\text{مجموع (ع 1 ك + ع 1 ك)}}{\text{مجموع (ع 0 ك + ع 0 ك)}}$$

مثال : من بيانات الجدول التالى :

| السلعة | سنة 1995 | | سنة 2000 | |
|--------|----------|--------|----------|--------|
| | السعر | الكمية | السعر | الكمية |
| أ | 5 | 17 | 10 | 25 |
| ب | 11 | 21 | 14 | 30 |
| ج | 9 | 29 | 12 | 35 |
| د | 4 | 41 | 6 | 50 |

والمطلوب حساب الرقم القياسي للأسعار وذلك باستخدام

- 1- رقم لاسبير، 2- رقم باش، 3- رقم فيشر،
 - 4- رقم دروبش وبالي، 5- رقم مارشال وأدجورث
- إذا علمت أن سنة 1995 سنة أساس.

الحل : نكون الجدول التالي :

| نوع السلعة | ع ⁰ | ك ⁰ | ع ¹ | ك ¹ | ع ⁰ ك ⁰ | ع ¹ ك ¹ | ع ⁰ ك ¹ | ع ¹ ك ⁰ |
|------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| أ | 5 | 17 | 10 | 25 | 85 | 125 | 170 | 250 |
| ب | 11 | 21 | 14 | 30 | 231 | 330 | 294 | 420 |
| ج | 9 | 29 | 12 | 35 | 261 | 315 | 348 | 420 |
| د | 4 | 41 | 6 | 50 | 164 | 200 | 246 | 300 |
| | | | | | 741 | 970 | 1058 | 1390 |

مجموع 1 ك⁰

$$1 - \text{رقم لاسبير} = 100 \times \frac{\text{مجموع 1 ك}^0}{\text{مجموع 1 ك}^1}$$

مجموع 1 ك⁰

$$= 100 \times \frac{1058}{741} = 142.8\%$$

مجموع 1 ك¹

$$2 - \text{رقم باش} = 100 \times \frac{\text{مجموع 1 ك}^1}{\text{مجموع 0 ك}^1}$$

مجموع 0 ك¹

$$= 100 \times \frac{1390}{970} = 143.3\%$$

$$100 \times \frac{\text{مجمع 1 لك} \quad \text{مجمع 1 لك}}{\text{مجمع 0 لك} \quad \text{مجمع 0 لك}} = \text{رقم فيشر المثالي} \quad -3$$

$$\%143.15 = 100 \times 1.433 \times 1.408 =$$

$$100 \times \frac{\text{مجمع 1 لك} \quad \text{مجمع 1 لك}}{\text{مجمع 0 لك} \quad \text{مجمع 0 لك}} = \text{رقم دروبش وبالي} \quad -4$$

$$\%143.06 = 100 \times \frac{1.433 + 1.428}{2} =$$

$$100 \times \frac{\text{مجمع (ع 1 لك + ع 1 لك)}}{\text{مجمع (ع 0 لك + ع 0 لك)}} = \text{رقم مارشال - إدجورث} \quad -5$$

$$100 \times \frac{\text{مجمع 1 لك} \quad \text{مجمع 1 لك}}{\text{مجمع 0 لك} \quad \text{مجمع 0 لك}} =$$

$$100 \times \frac{1390 + 1058}{970 + 741} =$$

$$2448 \\ \%143.07 = 100 \times \frac{\quad}{1711} =$$

مثال : من بيانات المثال السابق احسب الأرقام القياسية التجميعية السابقة للكميات مرجحاً بالأسعار كما يلي :

الحل : من بيانات جدول حل المثال السابق يمكن حساب الأرقام القياسية التجميعية للكميات المرجحة بالأسعار سنة الأساس 1995 كما يلي :

$$1 - \text{رقم لاسبير للكميات} = 100 \times \frac{\text{مجم ك 1 ع0}}{\text{مجم ك0 ع0}}$$

$$970 \\ \%130.9 = 100 \times \frac{\quad}{741} =$$

$$2 - \text{رقم باش للكميات} = 100 \times \frac{\text{مجم ك 1 ع1}}{\text{مجم ك0 ع1}}$$

$$1390 \\ \%131.38 = 100 \times \frac{\quad}{1058} =$$

$$3 - \text{رقم فيشر للكميات} = 100 \times \frac{\text{مجم ك 1 ع0} \times \text{مجم ك 1 ع1}}{\text{مجم ك0 ع0} \times \text{مجم ك0 ع1}}$$

$$\sqrt{131.09} = 100 \times 1.313 \times 1.309 =$$

$$-4 \quad \text{رقم دروبش وبنالى للكميات} = 100 \times \frac{\begin{array}{c} \text{مج ك 1 ع0} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{c} \text{مج ك 1 ع1} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{c} \text{مج ك0 ع0} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{c} \text{مج ك0 ع1} \\ \hline \end{array}} =$$

$$131.1 = 100 \times \frac{1.313 + 1.309}{2} =$$

$$-5 \quad \text{رقم مارشال - إدجورث للكميات} = 100 \times \frac{\text{مج (ك 1 ع0 + ك 1 ع1)}}{\text{مج (ك0 ع0 + ك0 ع1)}} =$$

$$100 \times \frac{\begin{array}{c} \text{مج ك 1 ع0} + \text{مج ك 1 ع1} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{c} \text{مج ك0 ع0} + \text{مج ك0 ع1} \\ \hline \end{array}} =$$

$$131.18 = 100 \times \frac{1390 + 970}{1058 + 741} =$$

ثالثاً : المتوسطات البسيطة للمناسيب

Simple Average of Relative Indices

بدلاً من حساب الأرقام القياسية بطريقة التجميع لأسعار وكميات السلع المختلفة الداخلة في تركيب الرقم القياسى فإن استخدام مناسيب الأسعار على حدة يمكن أن يكون أسلوباً مناسباً لمعرفة التغيرات في أسعار سلعة معينة بين سنة الأساس وسنة المقارنة ويعرف منسوب السعر كما ذكر سابقاً بأنه النسبة بين سعر السلعة في سنة المقارنة وسنة الأساس (1ع : 0ع) وأيضاً (ك1 : ك0) تعرف بمنسوب الكمية .

ووفقاً لهذه الحالة يكون لدينا عدداً من مناسيب الأسعار وعدد من مناسيب الكميات ويمكن استخراج المتوسط لكل منها كالاتى :

1 - الوسط الحسابى البسيط لمناسيب الأسعار

$$\text{الوسط الحسابى البسيط لمناسيب الأسعار} = 100 \times \frac{\text{مجموع مناسيب الأسعار}}{\text{عددها}}$$
$$= \frac{\text{مجموع (1ع / 0ع)} \times 100}{\text{ن}}$$

حيث 1ع أسعار سنة المقارنة ، 0ع أسعار سنة الأساس ، ن هى عدد السلع .

2- الوسط الهندسى البسيط لمناسيب الأسعار :

الوسط الهندسى البسيط للمناسيب = $\sqrt[n]{\text{حاصل ضرب المناسيب}}$

ولتسهيل إيجاد الوسط الهندسى البسيط للمناسيب فإنه غالباً ما تستخدم اللوغاريتمات لتبسيط العمليات الحسابية على الوجه الأكمل كالآتى :

$$\text{لو (الوسط الهندسى البسيط للمناسيب)} = \frac{\text{لو س}_1 + \text{لو س}_2 + \dots + \text{لو س}_n}{n}$$

$$= \frac{\left[\text{مجموع لو (ع/ 100) } \times 100 \right]}{n}$$

ويكون الوسط الهندسى للمناسيب هو العدد المقابل لناتج اللوغاريتم السابق .

مثال : احسب الوسط الحسابى لمناسيب الأسعار والوسط الهندسى البسيط للمناسيب من بيانات الجدول التالى باعتبار سنة 1995 سنة أساس .

| السلعة | الأسعار | |
|--------|---------|------|
| | 2000 | 1995 |
| أ | 170 | 70 |
| ب | 80 | 42 |
| ج | 26 | 14 |
| ء | 47 | 24 |

الحل : نكون الجدول التالى والذى يوضح حساب مناسب الأسعار

| السلعة | 1995 | 2000 | المنسوب = $100 \times \frac{1ع}{0ع}$ |
|--------|------|------|--------------------------------------|
| | 0ع | 1ع | |
| أ | 70 | 170 | $242.9 = 100 \times 70 / 170$ |
| ب | 42 | 80 | $190.5 = 100 \times 42 / 80$ |
| ج | 14 | 26 | $185.7 = 100 \times 14 / 26$ |
| ء | 24 | 47 | $200.0 = 100 \times 24 / 47$ |

1- الوسط الحسابى البسيط للمناسيب :

$$\frac{100 \times (1ع / 0ع)}{ن} =$$

$$\frac{200 + 185.7 + 190.5 + 242.9}{4} =$$

$$819.1$$

$$\%204.8 = \frac{819.1}{4} =$$

∴ الأسعار زادت بنسبة 104.8% فى سنة المقارنة عنها فى سنة الأساس .

2- الوسط الهندسى البسيط للمناسيب :

$$= \sqrt[4]{(200 + 185.7 + 190.5 + 242.9)}$$

$$(2.30 + 2.26 + 2.27 + 2.38) \frac{1}{4} =$$

$$9.23$$

$$2.31 = \frac{9.23}{4} =$$

وبالبحث فى جدول الأعداد المقابلة للوغاريتمات فإن الوسط الهندسى البسيط للمناسيب = 203.6 % .

∴ الأسعار زادت بنسبة 103.6% فى سنة المقارنة عنها فى سنة الأساس .

3- الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة :

أ- الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة بأوزان سنة الأساس :

وتحسب من العلاقة الآتية :

الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة بأوزان سنة الأساس

مجم و 0

$$100 \times \frac{\text{مجم و 0}}{\text{مجم و 0}} =$$

مجم و 0

1ع

حيث م = المنسوب =

0ع

$$و = 0ع \times 0ك$$

ب- الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة بأوزان سنة المقارنة :

ويحسب من العلاقة الآتية :

الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة بأوزان سنة المقارنة

$$\text{مجم م} \times \text{ون} = 100 \times \frac{\text{مجم ون}}{\text{مجم م}}$$

$$\text{حيث م} = \frac{\text{المنسوب}}{\text{م}} = \frac{\text{ع1}}{\text{ع0}}$$

$$\text{ون} = \text{ع1} \times \text{ك1}$$

مثال : من بيانات الجدول التالي :

| 2000 | | 1995 | | السلعة |
|----------|-----------|----------|-----------|--------|
| السعر ع1 | الكمية ك1 | السعر ع0 | الكمية ك0 | |
| 12 | 120 | 10 | 100 | أ |
| 20 | 150 | 15 | 200 | ب |
| 10 | 400 | 8 | 300 | ج |

أحسب :

- 1- الوسط الحسابي البسيط للمناسيب .
- 2- الوسط الحسابي للمناسيب المرجحة بأوزان سنة الأساس
- 3- الوسط الحسابي للمناسيب المرجحة بأوزان سنة المقارنة

الحل : نكون الجدول التالي :

| السلعة | ع ⁰ | ك ⁰ | ع ¹ | ك ¹ | النسب م ^{ع¹/ع⁰} | أوزان الأساس و ^{ع⁰ك⁰} | م [×] و | أوزان المقارنة و ^{ع¹ك¹} | م [×] و |
|---------|----------------|----------------|----------------|----------------|---|--|------------------|--|------------------|
| أ | 10 | 100 | 12 | 120 | 1.20 | 1000 | 1200 | 1440 | 1827 |
| ب | 15 | 200 | 20 | 150 | 1.33 | 3000 | 3990 | 3000 | 3990 |
| ج | 8 | 300 | 10 | 400 | 1.25 | 2400 | 3000 | 4000 | 5000 |
| المجموع | | | | | 3.78 | 6400 | 8190 | 8440 | 10718 |

1- الوسط الحسابى البسيط للمناسيب

$$\frac{\text{مجموع (ع}^1 / \text{ع}^0) \times 100}{\text{ن}}$$

$$= \frac{100 \times 3.78}{3} = 126\%$$

وهذه النتيجة تعنى أن متوسط أسعار السلع فى سنة 2000 زادت بنسبة 26% عن متوسط أسعارها فى سنة 1995 .

2- الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة بأوزان سنة الأساس :

$$= 100 \times \frac{\text{مجموع و}^0}{\text{مجموع و}^1}$$

$$= 100 \times \frac{819}{640} = 127.97\%$$

وهذه النتيجة تعنى أن متوسط الأسعار المرجحة بأوزان سنة الأساس فى سنة 2000 زادت بنسبة 27.97% عنها فى سنة 1995 .

3- الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة بأوزان سنة المقارنة :

$$\text{مجم م}^{\times} \text{ون} \\ 100 \times \frac{\text{مجم ون}}{10718} = \\ \%127 = 100 \times \frac{8440}{10718} =$$

وهذه النتيجة تعنى أن متوسط الأسعار المرجحة بأوزان سنة المقارنة فى سنة 2000 زادت بنسبة 27% عنها فى سنة 1995 .

اختبارات الأرقام القياسية Tests of Index Numbers

اقترح فيشر اختبارين لاختبار الأرقام القياسية وذكر أن أى رقم قياسى لا يحقق هذين الاختبارين لا يعتبر رقماً قياسياً أمثل من وجهة نظره ، وهذين الاختبارين هما :

أولاً: اختبار الانعكاس فى الزمن Time Reversal

يكون الرقم قابلاً للانعكاس فى الزمن إذا حقق الشرط الآتى:

$$\text{الرقم القياسى} \times \text{البديل الزمنى} = 1$$

مثال : الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار

$$1 = \frac{\text{مجم ع}^0}{\text{مجم ع}^1} \times \frac{\text{مجم ع}^1}{\text{مجم ع}^0}$$

∴ الرقم يقبل الانعكاس فى الزمن

مثال : رقم إدجورث القياسى للأسعار

$$1 = \frac{\text{مجموع } 0 \text{ (ك + 1 ك)}}{\text{مجموع } 1 \text{ (ك + 0 ك)}} \times \frac{\text{مجموع } 0 \text{ (ك + 1 ك)}}{\text{مجموع } 1 \text{ (ك + 0 ك)}} =$$

∴ الرقم يقبل الانعكاس فى الزمن

ثانياً : اختبار الانعكاس فى المعامل Test of Factor Reversal

يكون الرقم القياسى قابلاً للانعكاس فى المعامل إذا حقق الشرط الآتى :

الرقم القياسى × بديله المعامل = الرقم القياسى للقيمة

أمثلة لاختبار بعض الأرقام القياسية :

$$1 - \text{رقم لاسبير} = \frac{\text{مجموع } 1 \text{ ك}}{\text{مجموع } 0 \text{ ك}} \times 100$$

البديل الزمنى لرقم لاسبير

$$= \frac{\text{مجموع } 0 \text{ ك}}{\text{مجموع } 1 \text{ ك}}$$

(لاحظ أننا لإيجاد البديل الزمنى جعلنا أسعار الأساس هى أسعار

المقارنة وأسعار المقارنة هى أسعار الأساس ونفس الحال بالنسبة للكمية).

البديل المعاملى لرقم لاسبير :

$$\frac{\text{مج ك 1 ع 0}}{\text{مج ك 0 ع 0}} =$$

(لاحظ أننا لإيجاد البديل المعاملى للاسبير بدلنا ك مكان ع مع الاحتفاظ بالأرقام (1 ، 0) الممثلة للمقارنة والأساس كما هى) .

(أ) اختبار الانعكاس فى الزمن :

$$1 \neq \frac{\text{مج ع 0 ك 1}}{\text{مج ع 1 ك 0}} \times \frac{\text{مج ع 1 ك 0}}{\text{مج ع 0 ك 0}}$$

∴ رقم لاسبير لا يقبل الانعكاس فى الزمن .

(ب) اختبار الانعكاس فى المعامل :

$$\neq \frac{\text{مج ك 1 ع 0}}{\text{مج ك 0 ع 0}} \times \frac{\text{مج ع 1 ك 0}}{\text{مج ع 0 ك 0}}$$

∴ رقم لاسبير لا يقبل الانعكاس فى المعامل .

$$2- \text{رقم باش} = 100 \times \frac{\text{مج ع 1 ك 1}}{\text{مج ع 0 ك 1}}$$

البديل الزمنى لرقم باش

$$\frac{\text{مج ع 0 ك 1}}{\text{مج ع 1 ك 0}} =$$

البديل المعامل لرقم باش :

$$\frac{\text{مج ك 1 ع 1}}{=}$$

$$\text{مج ك 0 ع 1}$$

(أ) اختبار الانعكاس فى الزمن :

$$1 \neq \frac{\text{مج ع 0 ك 0}}{\text{مج ع 1 ك 0}} \times \frac{\text{مج ع 1 ك 1}}{\text{مج ع 0 ك 1}}$$

(ب) اختبار الانعكاس فى المعامل :

$$\frac{\text{مج ك 1 ع 1}}{\text{مج ك 0 ع 1}} \times \frac{\text{مج ك 1 ع 0}}{\text{مج ك 0 ع 0}} \neq \text{الرقم القياسى للقيمة}$$

∴ رقم باش لا يقبل اختبارى الانعكاس فى الزمن والمعامل .

$$3- \text{رقم مارشال وأدجورث} = \frac{\text{مج (ع 1 ك 0 + ع 1 ك 1)}}{100 \times \text{مج (ع 0 ك 0 + ع 0 ك 1)}}$$

البديل الزمنى :

$$\frac{\text{مج (ع 0 ك 1 + ع 0 ك 0)}}{\text{مج (ع 1 ك 1 + ع 1 ك 0)}}$$

اختبار الانعكاس فى الزمن :

$$1 = \frac{\text{مج (ع 0 ك 1 + ع 0 ك 0)}}{\text{مج (ع 1 ك 0 + ع 0 ك 1)}} \times \frac{\text{مج (ع 1 ك 0 + ع 0 ك 1)}}{\text{مج (ع 0 ك 0 + ع 0 ك 1)}}$$

∴ رقم مارشال وإدجورث يقبل الانعكاس فى الزمن .

البديل المعامل :

$$\frac{\text{مج (ك 1 ع 0 + ك 1 ع 1)}}{\text{مج (ك 0 ع 0 + ك 0 ع 1)}} =$$

اختبار الانعكاس فى المعامل :

$$\frac{\text{مج (ع 1 ك 0 + ع 1 ك 1)}}{\text{مج (ك 1 ع 0 + ك 1 ع 1)}} \times \frac{\text{مج (ك 1 ع 0 + ك 1 ع 1)}}{\text{مج (ك 0 ع 0 + ك 0 ع 1)}} =$$

∴ رقم مارشال وإدجورث لا ينعكس فى المعامل .

$$\left. \begin{array}{r} \text{مج ع 1 ك 0} \\ \text{مج ع 1 ك 1} \end{array} \right\} \times \left. \begin{array}{r} \text{مج ع 0 ك 0} \\ \text{مج ع 0 ك 1} \end{array} \right\} = \text{رقم فيشر المثالى} -4$$

$$\left. \begin{array}{r} \text{مج ع 0 ك 1} \\ \text{مج ع 0 ك 0} \end{array} \right\} \times \left. \begin{array}{r} \text{مج ع 1 ك 1} \\ \text{مج ع 1 ك 0} \end{array} \right\} = \text{البديل الزمنى}$$

اختبار الانعكاس في الزمن :

$$1 = \frac{\text{مجموع } 0 \text{ ك } 0}{\text{مجموع } 1 \text{ ك } 1} \times \frac{\text{مجموع } 1 \text{ ك } 0}{\text{مجموع } 0 \text{ ك } 0} =$$

∴ رقم فيشر يقبل الانعكاس في الزمن .

$$\frac{\text{مجموع } 1 \text{ ك } 1}{\text{مجموع } 0 \text{ ك } 0} \times \frac{\text{مجموع } 0 \text{ ك } 1}{\text{مجموع } 1 \text{ ك } 0} = \text{البديل المعامل}$$

اختبار الانعكاس في المعامل :

$$\frac{\text{مجموع } 1 \text{ ك } 1}{\text{مجموع } 0 \text{ ك } 0} \times \frac{\text{مجموع } 0 \text{ ك } 1}{\text{مجموع } 1 \text{ ك } 0} =$$

$$\frac{\text{مجموع } 1 \text{ ك } 1}{\text{مجموع } 0 \text{ ك } 0} = 2 \left[\frac{\text{مجموع } 1 \text{ ك } 1}{\text{مجموع } 0 \text{ ك } 0} \right]$$

∴ رقم فيشر ينعكس في المعامل .

ملحوظة : يلاحظ ما سبق أن الرقم القياسى لفيشر هو الرقم القياسى الوحيد الذى يقبل الانعكاس فى كل من الزمن والمعامل وهذه أحد الأسباب التى جعلت رقم فيشر يسمى برقم فيشر المثالى .
تغيير فترة الأساس :

فى بعض الأحيان نلجأ إلى تعديل فترة الأساس فى حالة إذا كانت فترة الأساس قديمة وأراد الباحث أن يجددها . ويمكن توضيح ذلك من خلال المثال التالى :

مثال : البيانات التالية توضح الرقم القياسى للأسعار (1965 = 100) خلال الفترة (1990 - 1995) .

الأرقام القياسية للأسعار (1965 = 100)

| السنة | 1965 | 1990 | 1991 | 1992 | 1993 | 1994 | 1995 |
|---------------|------|------|------|------|------|------|------|
| الرقم القياسى | 100 | 90 | 113 | 135 | 145 | 158 | 176 |

المطلوب تعديل سنة الأساس إلى سنة 1994 .

الحل : لتغيير سنة الأساس إلى 1994 يتم قسمة كل رقم فى السلسلة على قيمة الرقم القياسى لسنة 1994 وضرب الناتج $\times 100$ كالتالى :

$$\text{الرقم القياسى لسنة 1990} = 100 \times \frac{90}{158} = 57$$

$$\text{الرقم القياسى لسنة 1991} = 100 \times \frac{113}{158} = 71.5$$

$$\text{الرقم القياسي لسنة 1992} = 100 \times \frac{135}{158} = 85.4$$

$$\text{الرقم القياسي لسنة 1993} = 100 \times \frac{145}{158} = 91.8$$

$$\text{الرقم القياسي لسنة 1994} = 100 \times \frac{158}{158} = 100$$

$$\text{الرقم القياسي لسنة 1995} = 100 \times \frac{176}{158} = 111.4$$

ومن ثم نحصل على سلسلة جديدة من الأرقام القياسية (1994 = 100 = 100) كما هو موضح فى الجدول التالى :

الأرقام القياسية للأسعار (1994 = 100)

| السنة | 1990 | 1991 | 1992 | 1993 | 1994 | 1995 |
|---------------|------|------|------|------|------|-------|
| الرقم القياسي | 57 | 71.5 | 85.4 | 91.8 | 100 | 111.4 |

مثال : الجدول التالى يوضح سلسلة من الأرقام القياسية خلال الفترة (1987-1998) سنة الأساس (1988 = 100)

| السنة | الرقم القياسي (1988 = 100) |
|-------|----------------------------|
| 1987 | 99.2 |
| 1988 | 100.0 |
| 1989 | 104.5 |
| 1990 | 106.7 |
| 1991 | 109.8 |
| 1992 | 112.4 |
| 1993 | 116.7 |
| 1994 | 120.8 |
| 1995 | 125.6 |
| 1996 | 130.5 |
| 1997 | 148.6 |
| 1998 | 150.2 |

المطلوب : تغيير سنة الأساس إلى (1992 = 100)

الحل : لتغيير سنة الأساس إلى (1992 = 100) نقسم كل رقم في سلسلة الأرقام القياسية المعطاة في الجدول السابق على قيمة الرقم القياسي لسنة 1992 وضرب الناتج $\times 100$.

| السنة | الرقم القياسي (1992 = 100) |
|-------|----------------------------|
| 1987 | 88.3 |
| 1988 | 89.0 |
| 1989 | 93.0 |
| 1990 | 94.9 |
| 1991 | 97.7 |
| 1992 | 100.0 |
| 1993 | 103.8 |
| 1994 | 107.5 |
| 1995 | 111.7 |
| 1996 | 116.1 |
| 1997 | 132.2 |
| 1998 | 133.6 |

تغيير الأرقام القياسية فى حالة وجود رقمين قياسيين يختلفان فى فترة الأساس :

فى بعض الأحيان يكون المطلوب تغيير فترة الأساس فى حالة وجود رقمين قياسيين يختلفان فى فترة الأساس ويتم ذلك من خلال المفهوم الجبرى باستخدام عملية النسبة والتناسب والتي يوضحها المثال التالى :

مثال : يبين الجدول التالى سلسلتان من الأرقام القياسية ، الأولى أساسها عام (1980 = 100) والثانية أساسها عام (1984 = 100) والمطلوب تكملة بيانات السلسلتين .

| السنة | السلسلة الأولى (1980 = 100) | السلسلة الثانية (1984 = 100) |
|-------|--------------------------------|---------------------------------|
| 1980 | 100 | |
| 1981 | 130 | |
| 1982 | 160 | |
| 1983 | 189 | 100 |
| 1984 | 220 | 131 |
| 1985 | | 148 |
| 1986 | | 162 |
| 1987 | | 188 |
| 1988 | | |

الحل : للحصول على سلسلة أرقام قياسية متصلة يجب تعديل أحد الرقمين القياسيين إما يجعل سنة 1980 هى سنة أساس وبالتالي تستكمل السلسلة الأولى أو يجعل سنة 1984 هى سنة الأساس ومن ثم تستكمل السلسلة الثانية .

فلأستكمال السلسلة الأولى ، يلاحظ أن الرقم القياسى لعام 1984 فى السلسلة الأولى هو 220 وهذا الرقم يناظره فى السلسلة

الثانية الرقم 100 أى أن النسبة بينهما 220 : 100 وبالتالي يمكن تعديل أرقام السلسلة الثانية لجعلها تتبع أرقام السلسلة الأولى فى السنوات من 1985 إلى 1988 وذلك باستخدام عملية النسبة والتناسب التالية :

$$100 : 220$$

$$س : 131$$

حيث س ترمز إلى الرقم القياسى الجديد المطلوب لتكملة السلسلة الأولى

$$131 \times 220$$

$$\text{الرقم القياسى لسنة 1985} = \frac{\quad}{100} = 289.51$$

$$100 : 220$$

$$س : 148$$

$$148 \times 220$$

$$\text{الرقم القياسى لسنة 1986} = \frac{\quad}{100} = 325.6$$

وهكذا بالنسبة للأرقام القياسية لسنتى 1987 ، 1988 كما

سوف يتضح من الجدول التالى :

ولاستكمال أرقام السلسلة الثانية نستخدم نفس الطريقة السابقة فالرقم القياسى لسنة 1984 هو 100 وينظره فى السلسلة الأولى 220 أى أن النسبة بينهما 100 : 220 وبالتالي يمكن تعديل أرقام السلسلة الأولى لجعلها تتبع السلسلة الثانية فى السنوات من 1980 إلى 1983 وذلك باستخدام عملية النسبة والتناسب التالية :

$$220 : 100$$

$$100 : \text{س}$$

$$45.45 = \frac{100 \times 100}{220} = \text{الرقم القياسي لسنة 1980}$$

$$59.09 = \frac{130 \times 100}{220} = \text{الرقم القياسي لسنة 1981}$$

$$72.72 = \frac{160 \times 100}{220} = \text{الرقم القياسي لسنة 1982}$$

$$85.91 = \frac{189 \times 100}{220} = \text{الرقم القياسي لسنة 1983}$$

والجدول التالي يوضح الأرقام القياسية للسلسلتين بعد استكمالهما :

| السلسلة الثانية (100 = 1984) | السلسلة الأولى (100 = 1980) | السنة |
|---------------------------------|--------------------------------|-------|
| 45.45 | 100 | 1980 |
| 59.09 | 130 | 1981 |
| 72.72 | 160 | 1982 |
| 85.91 | 189 | 1983 |
| 100 | 220 | 1984 |
| 131 | 289.51 | 1985 |
| 148 | 325.60 | 1986 |
| 162 | 356.40 | 1987 |
| 188 | 413.16 | 1988 |

الأرقام القياسية للتجارة الخارجية :

إن إحصاءات التجارة الخارجية لأى دولة تعتبر من الأساسيات التى تبنى عليها سياسة الدولة الاقتصادية حيث توضح مدى اعتمادها على العالم الخارجى من خلال قياس التغيرات فى حجم وهيكل التجارة الخارجية وإحداث التنمية فى مختلف القطاعات المكونة للمقتصد القومى مثل القطاعات الإنتاجية والاستهلاكية والاستثمارية وغيرها . ويمكن الاستفادة من الأرقام القياسية للتجارة الخارجية فى توضيح التغيرات التى قد تطرأ على قيم وكميات وأسعار كل من الصادرات والواردات .

وتستخدم الأرقام القياسية لكمية وأسعار وقيم كل من الصادرات والواردات فى حساب المؤشرات الاقتصادية التالية :

الرقم القياسى لكمية الواردات

$$(1) \text{ معدل التبادل الدولى الاجمالى} = \frac{\text{الرقم القياسى لكمية الصادرات}}{100} \times 100$$

وزيادة هذه النسبة عن الواحد الصحيح تعنى أنه فى مقابل كمية معينة من الصادرات أمكن الحصول على قدر أكبر من الواردات .

الرقم القياسى لأسعار الصادرات

$$(2) \text{ معدل التبادل الدولى الصافى} = \frac{\text{الرقم القياسى لأسعار الواردات}}{100} \times 100$$

فإذا كان هذا المعدل يساوى 100 يدل ذلك على أن التغير الذى حدث فى أسعار الصادرات قابلة تغير مساوى له فى أسعار الواردات . أما إذا كان هذا المعدل أكبر من 100 فمعنى هذا أن أسعار الصادرات قد ارتفعت بالمقارنة بأسعار الواردات ويكون ذلك فى صالح الدولة .

$$\text{أو نسبة التبادل} = \frac{\text{الرقم القياسي لأسعار الصادرات}}{\text{الرقم القياسي لأسعار الواردات}} \times 100$$

ويرجع الاهتمام بهذه النسبة أنها تدلنا على مدى سيطرة صادرات الدولة على وارداتها . وأنها تدلنا على مقدار القوة الشرائية للدولة بالنسبة للخارج ، فإذا كانت هذه النسبة أقل من الواحد الصحيح دل ذلك على أنها في غير صالح الدولة لأن ذلك يعنى أن أسعار الصادرات أقل من أسعار الواردات مما يؤثر سلباً على الميزان التجارى للدولة .

بينما إذا زادت هذه النسبة عن الواحد الصحيح دل ذلك على أنها فى صالح الدولة لأن ذلك يعنى أن أسعار الصادرات تكون أكبر من أسعار الواردات مما يكون له أثر إيجابى على الميزان التجارى للدولة .

ولتوضيح المفهوم السابق نفرض أن دولة مثل ليبيا تصدر النفط وتستورد القمح فإذا زاد الطلب على النفط الليبي ، فإن سعره يرتفع ، وعندئذ تستطيع ليبيا أن تشتري بهذا السعر من الخارج سلعاً أكثر عدداً من ذي قبل ، فى مقابل نفس الكمية المصدرة من النفط وعندئذ تعتبر نسبة التبادل فى صالح ليبيا :

| الحالة | وحدات مصدرة | السعر | = | وحدات مستوردة | السعر |
|---------------------------|----------------|-------|---|------------------|-------|
| قبل زيادة الطلب على النفط | 900 | 4 | = | 3600 | 1 |
| بعد زيادة الطلب على النفط | 900 | 8 | = | 7200 | 1 |

فقد تضاعفت أسعار صادرات النفط من 4 إلى 8 ، وأصبح رقمها القياسى 200% بينما ظلت أسعار الواردات كما هى ورقمها

القياسى 100 وارتفعت نسبة التبادل إلى 2 وذلك بافتراض توازن ميزان المدفوعات خلال فترتى المقارنة (1 ، 2) .

وإذا كان المطلوب قياس أثر التجارة الخارجية على الدخل القومى الحقيقى وعلى الرفاهية الاقتصادية فإن المقياس المناسب هو معدل التبادل الداخلى والذى يأخذ فى الاعتبار كل من سعر وكمية الصادرات والواردات حيث :

$$(3) \text{ معدل التبادل الداخلى} = \frac{\text{الرقم القياسى لقيمة الصادرات}}{100 \times \text{الرقم القياسى لقيمة الواردات}}$$

أو = معدل التبادل التجارى * الرقم القياسى لكمية الصادرات
ويعبر هذا المعدل عن كمية الواردات التى أمكن الحصول عليها مقابل العائد من الصادرات ، ويكون هذا المعدل فى صالح الدولة إذا كان أكبر من الواحد الصحيح والعكس صحيح .

تمارين

(1) الجدول الآتي يوضح أسعار بعض السلع الغذائية أ ، ب ، ج ، د ، هـ
عن عامي 1980 ، 1990 بالجنيه لكل كيلو جرام .

| السلعة | 1980 | 1990 |
|--------|------|------|
| أ | 35 | 45 |
| ب | 40 | 60 |
| ج | 55 | 80 |
| د | 60 | 90 |
| هـ | 80 | 110 |

المطلوب :

1- حساب الرقم التجميعي البسيط للأسعار باستخدام سنة 1980
أساس .

2- الوسط الحسابي البسيط لمناسيب الأسعار باستخدام سنة 1980
أساس .

(2) فيما يلي جدول يوضح أسعار وكميات ثلاثة سلع أ ، ب ، ج في
عامي 1990 ، 1995 بالجنيه لكل كيلو جرام .

| السلعة | الأسعار | | الكميات | |
|--------|---------|------|---------|------|
| | 1990 | 1995 | 1990 | 1995 |
| أ | 10 | 50 | 28 | 16 |
| ب | 20 | 90 | 15 | 14 |
| ج | 30 | 140 | 20 | 10 |

المطلوب : حساب الأرقام القياسية التالية مع تفسير النتائج
المتحصل عليها باعتبار سنة 1990 أساس

- 1- الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار .
 - 2- الرقم القياسى التجميعى البسيط للكميات .
 - 3- الرقم القياسى التجميعى البسيط للقيمة .
- (3) احسب الأرقام القياسية التالية من بيانات جدول تمرين (2)
- أ- الرقم القياسى التجميعى المرجح بكميات فترة الأساس (الاسبير) .
 - ب- رقم باش .
 - ج- رقم مارشال- إدجورث .
 - ء- رقم فيشر المثالى .

(4) فيما يلى أسعار وكميات ثلاث سلع لعامى 1995 ، 2000

| السلعة | الأسعار | | الكميات | |
|--------|---------|------|---------|------|
| | 1995 | 2000 | 1995 | 2000 |
| أ | 120 | 160 | 40 | 60 |
| ب | 180 | 220 | 30 | 80 |
| ج | 240 | 300 | 50 | 54 |

وباعتبار سنة 1995 أساس أحسب الآتى :

- أ- الوسط الحسابى لمناسيب الأسعار .
- ب- الوسط الهندسى لمناسيب الأسعار .

(5) باستخدام نتائج تمرين (3) المطلوب اختبار الانعكاس فى الزمن والانعكاس فى المعامل .

(6) الجدول الآتى يمثل متوسط الأجر الشهري لبعض الصناعات الاستثمارية فى مصر فى عامى 1996 ، 1998 .

| السنة | صناعة 1 | صناعة 2 | صناعة 3 | صناعة 4 |
|-------|---------|---------|---------|---------|
| 1996 | 420 | 480 | 520 | 550 |
| 1998 | 600 | 700 | 900 | 1200 |

والمطلوب تركيب رقم قياسى بسيط للأجور باعتبار سنة 1996 أساس .

(7) المطلوب تكملة بيانات الجدول التالى :

| السنة | 100 = 1965 | 100 = 1975 |
|-------|------------|------------|
| 1964 | 94 | |
| 1965 | 100 | |
| 1966 | 103 | |
| 1967 | 106 | |
| 1968 | 108 | |
| 1969 | 109 | |
| 1970 | 112 | |
| 1971 | 120 | |
| 1972 | 125 | |
| 1973 | 130 | |
| 1974 | 140 | |
| 1975 | 170 | 100 |
| 1976 | | 129 |
| 1977 | | 135 |
| 1978 | | 145 |
| 1979 | | 160 |
| 1980 | | 175 |

المراجع

أولاً : مراجع باللغة العربية :

- 1- أحمد عبادة سرحان ، العينات ، مكتبة النهضة المصرية ، 1975
- 2- أحمد عباده سرحان ، صلاح الدين طلبية ، أسس الإحصاء ، دار الكتب الجامعية ، الإسكندرية ، 1986 .
- 3- السيد محمد خيرى ، الإحصاء فى البحوث النفسية والتربوية والاجتماعية ، دار النهضة العربية ، 1970
- 4- جابر أحمد بسيونى (دكتور) ، المبادئ الأساسية للمحددات والمصفوفات والاحتمالات وتطبيقاتها فى العلوم الزراعية ، كلية الزراعة (سابقا باشبا) ، جامعة الإسكندرية ، 1999 .
- 5- محمد صلاح الدين صدقى ، مبادئ النظرية الإحصائية ، دار النهضة العربية ، 1967 .
- 6- فاروق عبد العظيم (دكتور) وآخرون ، مقدمة فى الإحصاء ، دار المطبوعات الجامعية ، الإسكندرية 1983 .

ثانياً : مراجع باللغة الأجنبية :

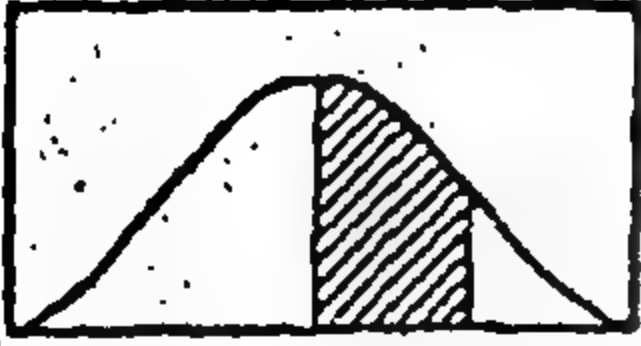
- 1- Alder, H.L. and Roessler, E.B., **Introduction to Probability and Statistics**, W.H. Freeman Company, San Fran Cisco, U.S.A., 1986.
- 2- Anderson, R.L. and Bancroft, T.A., **Statistical Theory in Research**, McGraw-Hill, New York, 1952.
- 3- Anderson, O.D., **Time Series Analysis and Forecasting, The Box-Jenkins Approach**, Butterworth, London, 1977.

- 4- Bails, Sale G., and Larry C., **Business Fluctuations: Forecasting Techniques and Applications**, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1982.
- 5- Barry R. and Ralph M., **Quantitative Analysis for Management**, 3rd Edition, Allyn Baron Inc., U.S.A., 1988.
- 6- Blalock, H.M., **Social Statistics**, McGraw-Hill, N.Y., 1972.
- 7- Bowerman, Bruce L., and Richard T., **Time Series Analysis and Forecasting**, 2nd Ed. Duxbury, North Scituate.
- 8- Brillinger, David R., **Time Series Data Analysis and Theory**, Holt, Rinehart and Winstor, N.Y., 1963.
- 9- Broen, Robert Boodel, **Smoothing, Forecasting and Predaction of Discrete Time Series**, Printice. Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1963.
- 10- Cochran, W.G., **Sampling Techniques**, Johnwiley Sons, N.Y., 1953.
- 11- Cramer, Harald, **The Elements of Probability Theory**, Wiely, New York, 1955.
- 12- Croxton, F.E. and Cowden, D.J., **Applied General Statisticis**, Printice-Hall, Inc., Englewood Cliffes, N.J., 1955.
- 13- Draper, N.R. and H. Smith, **Applied Regression Analysis**, Wiley, New York, 1977.

- 14-Feller, Williams. **An Introduction to probability Theory and Its Application**, Vol 1, Wiely, New York, 1950.
- 15-Freund, John F., **Mathematical Statistics**, Prentice-Hall, Englewood Cliff, N.J., 1980.
- 16-Hogg, Robert V., and Allen T. Craig, **Introduction to Mathematical Statistics**, 4th Edition, Macmillan, New York, 1978.
- 17-Johnston, J., **Econometric Methods**, McGraw-Hill Book Co., New York, 1963.
- 18-Larsen, Richard J., and Morris L. Marx, **An Introduction to Mathematical Statistics and Its Application**, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1981.
- 19-Mc Call, Chester H., **Sampling and Statistical Handbook for Research**. Iowa State University Press, Ames, 1982.
- 20- Montgomery, Douglas C., and Lynwood A. Johnson, **Forecasting and Time Series Analysis**, McGraw-Hill, New York, 1976.
- 21-Warwich, Donald P., and Charles A. Lininger, **The Sample Survey: Theory and Practice**, McGraw-Hill, New York, 1975.
- 22-Wayne W. Daniel and James C. Terrel, **Business Statistics for Management and Economics**, 5th ed., Houghton Mifflin Co., U.S.A., 1989.

الملاحق

الجداول الإحصائية



الجدول الإحصائية

Table I. Table of Areas of the Normal Curve

| $(Y - \mu)/\sigma = Z$ | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0.0 | .0000 | .0040 | .0080 | .0120 | .0160 | .0199 | .0239 | .0279 | .0319 | .0359 |
| 0.1 | .0398 | .0438 | .0478 | .0517 | .0557 | .0596 | .0636 | .0675 | .0714 | .0753 |
| 0.2 | .0793 | .0832 | .0871 | .0910 | .0948 | .0987 | .1026 | .1064 | .1103 | .1141 |
| 0.3 | .1179 | .1217 | .1255 | .1293 | .1331 | .1368 | .1406 | .1443 | .1480 | .1517 |
| 0.4 | .1554 | .1591 | .1628 | .1664 | .1700 | .1736 | .1772 | .1808 | .1844 | .1879 |
| 0.5 | .1915 | .1950 | .1985 | .2019 | .2054 | .2088 | .2123 | .2157 | .2190 | .2224 |
| 0.6 | .2257 | .2291 | .2324 | .2357 | .2389 | .2422 | .2454 | .2486 | .2517 | .2549 |
| 0.7 | .2580 | .2611 | .2642 | .2673 | .2704 | .2734 | .2764 | .2794 | .2823 | .2852 |
| 0.8 | .2881 | .2910 | .2939 | .2967 | .2995 | .3023 | .3051 | .3078 | .3106 | .3133 |
| 0.9 | .3159 | .3186 | .3212 | .3238 | .3264 | .3289 | .3315 | .3340 | .3365 | .3389 |
| 1.0 | .3413 | .3438 | .3461 | .3485 | .3508 | .3531 | .3554 | .3577 | .3599 | .3621 |
| 1.1 | .3643 | .3665 | .3686 | .3708 | .3729 | .3749 | .3770 | .3790 | .3810 | .3830 |
| 1.2 | .3849 | .3869 | .3888 | .3907 | .3925 | .3944 | .3962 | .3980 | .3997 | .4015 |
| 1.3 | .4032 | .4049 | .4066 | .4082 | .4099 | .4115 | .4131 | .4147 | .4162 | .4177 |
| 1.4 | .4192 | .4207 | .4222 | .4236 | .4251 | .4265 | .4279 | .4292 | .4306 | .4319 |
| 1.5 | .4332 | .4345 | .4357 | .4370 | .4382 | .4394 | .4406 | .4418 | .4429 | .4441 |
| 1.6 | .4452 | .4463 | .4474 | .4484 | .4495 | .4505 | .4515 | .4525 | .4535 | .4545 |
| 1.7 | .4554 | .4564 | .4573 | .4582 | .4591 | .4599 | .4608 | .4616 | .4625 | .4633 |
| 1.8 | .4641 | .4649 | .4656 | .4664 | .4671 | .4678 | .4686 | .4693 | .4699 | .4706 |
| 1.9 | .4713 | .4719 | .4726 | .4732 | .4738 | .4744 | .4750 | .4758 | .4761 | .4767 |
| 2.0 | .4772 | .4778 | .4783 | .4788 | .4793 | .4798 | .4803 | .4808 | .4812 | .4817 |
| 2.1 | .4821 | .4826 | .4830 | .4834 | .4838 | .4842 | .4846 | .4850 | .4854 | .4857 |
| 2.2 | .4861 | .4864 | .4868 | .4871 | .4875 | .4878 | .4881 | .4884 | .4887 | .4890 |
| 2.3 | .4893 | .4896 | .4898 | .4901 | .4904 | .4906 | .4909 | .4911 | .4913 | .4916 |
| 2.4 | .4918 | .4920 | .4922 | .4925 | .4927 | .4929 | .4931 | .4932 | .4934 | .4936 |
| 2.5 | .4938 | .4940 | .4941 | .4943 | .4945 | .4946 | .4948 | .4949 | .4951 | .4952 |
| 2.6 | .4953 | .4955 | .4956 | .4957 | .4959 | .4960 | .4961 | .4962 | .4963 | .4964 |
| 2.7 | .4965 | .4966 | .4967 | .4968 | .4969 | .4970 | .4971 | .4972 | .4973 | .4974 |
| 2.8 | .4974 | .4975 | .4976 | .4977 | .4977 | .4978 | .4979 | .4979 | .4980 | .4981 |
| 2.9 | .4981 | .4982 | .4982 | .4983 | .4984 | .4984 | .4985 | .4985 | .4986 | .4986 |
| 3.0 | .4986 | .4987 | .4987 | .4988 | .4989 | .4989 | .4989 | .4989 | .4989 | .4990 |



Table II. Distribution of t

| Degrees of freedom | Probability | | | | | | | | | | | | |
|--------------------|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|---------|
| | 0.9 | 0.8 | 0.7 | 0.6 | 0.5 | 0.4 | 0.3 | 0.2 | 0.1 | 0.05 | 0.02 | 0.01 | 0.001 |
| 1 | 0.158 | 0.325 | 0.510 | 0.727 | 1.000 | 1.378 | 1.963 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 | 636.610 |
| 2 | 0.142 | 0.289 | 0.443 | 0.617 | 0.816 | 1.061 | 1.386 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 | 31.598 |
| 3 | 0.137 | 0.277 | 0.424 | 0.584 | 0.765 | 0.978 | 1.250 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 | 12.924 |
| 4 | 0.134 | 0.271 | 0.414 | 0.569 | 0.741 | 0.941 | 1.190 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 | 8.610 |
| 5 | 0.132 | 0.267 | 0.408 | 0.559 | 0.727 | 0.920 | 1.156 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.306 | 4.032 | 6.860 |
| 6 | 0.131 | 0.265 | 0.404 | 0.553 | 0.713 | 0.906 | 1.134 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 | 5.950 |
| 7 | 0.130 | 0.263 | 0.402 | 0.549 | 0.711 | 0.896 | 1.119 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 | 5.408 |
| 8 | 0.130 | 0.262 | 0.399 | 0.546 | 0.708 | 0.889 | 1.109 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.353 | 5.041 |
| 9 | 0.129 | 0.261 | 0.398 | 0.543 | 0.703 | 0.883 | 1.100 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 | 4.791 |
| 10 | 0.129 | 0.260 | 0.397 | 0.542 | 0.700 | 0.879 | 1.093 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.182 | 4.557 |
| 11 | 0.129 | 0.260 | 0.396 | 0.540 | 0.697 | 0.876 | 1.093 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 | 4.437 |
| 12 | 0.128 | 0.259 | 0.395 | 0.539 | 0.695 | 0.873 | 1.083 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 | 4.318 |
| 13 | 0.128 | 0.259 | 0.394 | 0.538 | 0.694 | 0.870 | 1.079 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 | 4.221 |
| 14 | 0.128 | 0.258 | 0.393 | 0.537 | 0.692 | 0.868 | 1.076 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 | 4.140 |
| 15 | 0.128 | 0.258 | 0.393 | 0.536 | 0.691 | 0.866 | 1.074 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 | 4.073 |
| 16 | 0.128 | 0.258 | 0.392 | 0.535 | 0.690 | 0.865 | 1.071 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 | 4.015 |
| 17 | 0.128 | 0.257 | 0.392 | 0.534 | 0.689 | 0.863 | 1.069 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 | 3.965 |
| 18 | 0.127 | 0.257 | 0.392 | 0.534 | 0.688 | 0.862 | 1.067 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 | 3.922 |
| 19 | 0.127 | 0.257 | 0.391 | 0.533 | 0.688 | 0.861 | 1.066 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 | 3.883 |
| 20 | 0.127 | 0.257 | 0.391 | 0.533 | 0.687 | 0.860 | 1.064 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 | 3.850 |
| 21 | 0.127 | 0.257 | 0.391 | 0.532 | 0.686 | 0.859 | 1.063 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 | 3.819 |
| 22 | 0.127 | 0.256 | 0.390 | 0.532 | 0.686 | 0.858 | 1.061 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 | 3.792 |
| 23 | 0.127 | 0.256 | 0.390 | 0.532 | 0.685 | 0.857 | 1.060 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 | 3.767 |
| 24 | 0.127 | 0.256 | 0.390 | 0.531 | 0.685 | 0.857 | 1.059 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 | 3.746 |
| 25 | 0.127 | 0.256 | 0.390 | 0.531 | 0.684 | 0.856 | 1.058 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 | 3.725 |
| 26 | 0.127 | 0.256 | 0.390 | 0.531 | 0.684 | 0.856 | 1.058 | 1.316 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 | 3.707 |
| 27 | 0.127 | 0.256 | 0.390 | 0.531 | 0.684 | 0.855 | 1.057 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 | 3.690 |
| 28 | 0.127 | 0.256 | 0.389 | 0.530 | 0.683 | 0.855 | 1.056 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 | 3.674 |
| 29 | 0.127 | 0.256 | 0.389 | 0.530 | 0.683 | 0.854 | 1.055 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 | 3.658 |
| 30 | 0.127 | 0.256 | 0.389 | 0.530 | 0.683 | 0.854 | 1.055 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 | 3.646 |
| 40 | 0.126 | 0.255 | 0.388 | 0.529 | 0.681 | 0.851 | 1.050 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 | 3.551 |
| 60 | 0.126 | 0.254 | 0.387 | 0.527 | 0.679 | 0.849 | 1.046 | 1.296 | 1.671 | 2.000 | 2.399 | 2.680 | 3.480 |
| 120 | 0.126 | 0.254 | 0.386 | 0.526 | 0.677 | 0.846 | 1.041 | 1.289 | 1.658 | 1.980 | 2.358 | 2.617 | 3.373 |
| ∞ | 0.126 | 0.253 | 0.385 | 0.524 | 0.674 | 0.842 | 1.036 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.320 | 2.578 | 3.201 |

SOURCE: Table II is reprinted from Table III of Ronald A. Fisher and Frank Yates, *Statistical Tables for Biological, Agricultural, and Medical Research*, 4 ed., 1953, published by Oliver & Boyd, Ltd., Edinburgh, by permission of the authors and publishers.



Table III. Table of Chi Square

| Degree of freedom | Probability that chi-square value will be exceeded | | | | | | | | | |
|-------------------|--|---------|---------|---------|--------|-------|-------|-------|-------|--------|
| | 0.995 | 0.990 | 0.975 | 0.950 | 0.900 | 0.100 | 0.050 | 0.025 | 0.010 | 0.005 |
| 1 | 0.00393 | 0.00157 | 0.00982 | 0.01303 | 0.0158 | 2.71 | 3.84 | 5.02 | 6.63 | 7.88 |
| 2 | 0.0100 | 0.0201 | 0.0505 | 0.103 | 0.211 | 4.61 | 5.99 | 7.38 | 9.21 | 10.60 |
| 3 | 0.072 | 0.115 | 0.216 | 0.352 | 0.584 | 6.25 | 7.81 | 9.35 | 11.34 | 12.84 |
| 4 | 0.207 | 0.297 | 0.484 | 0.711 | 1.064 | 7.78 | 9.49 | 11.14 | 13.28 | 14.86 |
| 5 | 0.412 | 0.554 | 0.831 | 1.143 | 1.61 | 9.24 | 11.07 | 12.83 | 15.09 | 16.75 |
| 6 | 0.676 | 0.872 | 1.24 | 1.64 | 2.20 | 10.64 | 12.59 | 14.45 | 16.81 | 18.55 |
| 7 | 0.989 | 1.24 | 1.69 | 2.17 | 2.83 | 12.02 | 14.07 | 16.01 | 18.48 | 20.28 |
| 8 | 1.34 | 1.65 | 2.18 | 2.73 | 3.49 | 13.36 | 15.51 | 17.53 | 20.09 | 21.96 |
| 9 | 1.73 | 2.09 | 2.70 | 3.33 | 4.17 | 14.68 | 16.92 | 19.02 | 21.67 | 23.59 |
| 10 | 2.18 | 2.56 | 3.25 | 3.94 | 4.87 | 15.99 | 18.31 | 20.48 | 23.21 | 25.19 |
| 11 | 2.60 | 3.05 | 3.82 | 4.57 | 5.58 | 17.23 | 19.68 | 21.92 | 24.72 | 26.76 |
| 12 | 3.07 | 3.57 | 4.40 | 5.23 | 6.30 | 18.55 | 21.03 | 23.34 | 26.22 | 28.30 |
| 13 | 3.57 | 4.11 | 5.01 | 5.89 | 7.04 | 19.81 | 22.36 | 24.74 | 27.69 | 29.82 |
| 14 | 4.07 | 4.66 | 5.63 | 6.57 | 7.79 | 21.06 | 23.68 | 26.12 | 29.14 | 31.32 |
| 15 | 4.60 | 5.23 | 6.26 | 7.26 | 8.55 | 22.31 | 25.00 | 27.49 | 30.58 | 32.80 |
| 16 | 5.14 | 5.81 | 6.91 | 7.96 | 9.31 | 23.54 | 26.30 | 28.85 | 32.00 | 34.27 |
| 17 | 5.70 | 6.41 | 7.56 | 8.67 | 10.09 | 24.77 | 27.59 | 30.19 | 33.41 | 35.72 |
| 18 | 6.26 | 7.01 | 8.23 | 9.39 | 10.86 | 25.99 | 28.87 | 31.53 | 34.81 | 37.16 |
| 19 | 6.84 | 7.63 | 8.91 | 10.12 | 11.65 | 27.20 | 30.14 | 32.85 | 36.19 | 38.58 |
| 20 | 7.43 | 8.26 | 9.59 | 10.85 | 12.44 | 28.41 | 31.41 | 34.17 | 37.57 | 40.00 |
| 21 | 8.03 | 8.90 | 10.28 | 11.59 | 13.24 | 29.62 | 32.67 | 35.45 | 38.93 | 41.40 |
| 22 | 8.64 | 9.54 | 10.98 | 12.34 | 14.04 | 30.81 | 33.92 | 36.78 | 40.29 | 42.80 |
| 23 | 9.26 | 10.20 | 11.69 | 13.09 | 14.85 | 32.01 | 35.17 | 38.08 | 41.64 | 44.18 |
| 24 | 9.89 | 10.88 | 12.40 | 13.85 | 15.66 | 33.20 | 36.42 | 39.36 | 42.98 | 45.56 |
| 25 | 10.52 | 11.52 | 13.12 | 14.61 | 16.47 | 34.38 | 37.65 | 40.65 | 44.31 | 46.93 |
| 26 | 11.16 | 12.20 | 13.84 | 15.38 | 17.29 | 35.56 | 38.89 | 41.92 | 45.64 | 48.29 |
| 27 | 11.81 | 12.88 | 14.57 | 16.16 | 18.11 | 36.74 | 40.11 | 43.19 | 46.96 | 49.64 |
| 28 | 12.46 | 13.56 | 15.31 | 16.93 | 18.94 | 37.92 | 41.34 | 44.46 | 48.28 | 50.99 |
| 29 | 13.12 | 14.26 | 16.05 | 17.71 | 19.77 | 39.09 | 42.56 | 45.72 | 49.59 | 52.34 |
| 30 | 13.79 | 14.95 | 16.79 | 18.49 | 20.60 | 40.26 | 43.77 | 46.98 | 50.89 | 53.67 |
| 40 | 20.71 | 22.16 | 24.43 | 26.51 | 29.03 | 51.80 | 55.76 | 59.34 | 63.69 | 66.77 |
| 50 | 27.99 | 29.71 | 32.36 | 34.76 | 37.69 | 63.17 | 67.50 | 71.42 | 76.16 | 79.49 |
| 60 | 35.53 | 37.48 | 40.48 | 43.19 | 46.46 | 74.40 | 79.08 | 83.30 | 88.38 | 91.95 |
| 70 | 43.28 | 45.44 | 48.76 | 51.74 | 55.33 | 85.53 | 90.53 | 95.02 | 100.4 | 104.22 |
| 80 | 51.17 | 53.54 | 57.15 | 60.39 | 64.23 | 96.58 | 101.9 | 106.6 | 112.3 | 116.32 |
| 90 | 59.20 | 61.75 | 65.65 | 69.13 | 73.29 | 107.6 | 113.1 | 118.1 | 124.1 | 128.3 |
| 100 | 67.33 | 70.06 | 74.22 | 77.93 | 82.36 | 118.5 | 124.3 | 129.6 | 135.8 | 140.2 |
| Z_{α} | -2.58 | -2.33 | -1.96 | -1.64 | -1.23 | +1.23 | +1.64 | +1.96 | +2.33 | +2.58 |

NOTE: For $\nu > 100$ (i.e., for more than 100 degrees of freedom) take

$$\chi^2 = \nu \left[1 - \frac{2}{9\nu} + Z_{\alpha} \sqrt{\frac{2}{9\nu}} \right]^3 \quad \text{or} \quad \chi^2 = \nu \left[Z_{\alpha} + \sqrt{(2/\nu)} \right]^2$$

according to the degree of accuracy required. Z_{α} is the standardized normal deviate corresponding to the α level of significance, and is shown in the bottom line of the table.

SOURCE: By permission of Prof. E. S. Pearson, from Catherine M. Thompson, "Tables of the Percentage Points of the Incomplete Beta Function and of the χ^2 Distribution," *Biometrika*, vol. 32, pp. 168-181, 188-189, 1941.

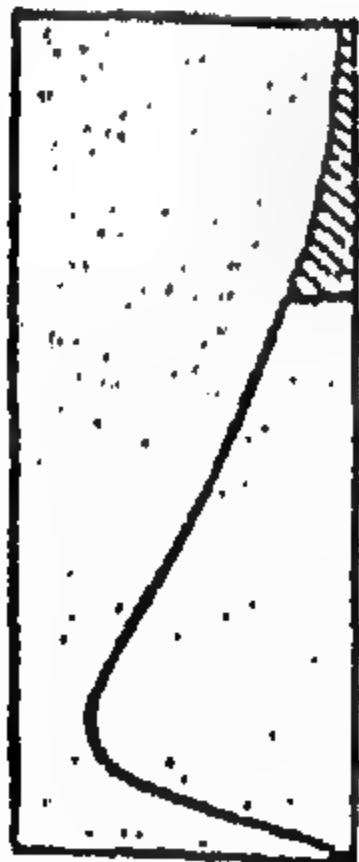


Table IV. F Distribution

Degrees of freedom for the numerator

| df for denominator | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
|--------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|----------|
|--------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|----------|

Upper 10 per cent points

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 39.86 | 49.59 | 53.59 | 55.83 | 57.24 | 58.20 | 58.91 | 59.44 | 59.86 | 60.20 | 60.70 | 61.21 | 61.74 | 62.00 | 62.26 | 62.43 | 62.79 | 63.04 | 63.33 |
| 2 | 8.53 | 9.00 | 9.16 | 9.24 | 9.29 | 9.33 | 9.35 | 9.37 | 9.38 | 9.39 | 9.41 | 9.42 | 9.43 | 9.44 | 9.45 | 9.46 | 9.47 | 9.48 | 9.49 |
| 3 | 5.64 | 5.40 | 5.30 | 5.24 | 5.21 | 5.20 | 5.19 | 5.18 | 5.17 | 5.16 | 5.15 | 5.14 | 5.13 | 5.12 | 5.11 | 5.10 | 5.09 | 5.08 | 5.07 |
| 4 | 4.54 | 4.32 | 4.19 | 4.11 | 4.05 | 4.01 | 3.98 | 3.95 | 3.94 | 3.92 | 3.90 | 3.87 | 3.84 | 3.83 | 3.82 | 3.80 | 3.79 | 3.78 | 3.76 |
| 5 | 4.04 | 3.78 | 3.62 | 3.53 | 3.45 | 3.40 | 3.37 | 3.34 | 3.32 | 3.30 | 3.27 | 3.24 | 3.21 | 3.19 | 3.17 | 3.16 | 3.14 | 3.13 | 3.12 |
| 6 | 3.75 | 3.46 | 3.29 | 3.19 | 3.11 | 3.06 | 3.01 | 2.98 | 2.96 | 2.94 | 2.90 | 2.87 | 2.84 | 2.82 | 2.80 | 2.78 | 2.76 | 2.74 | 2.72 |
| 7 | 3.50 | 3.26 | 3.07 | 2.96 | 2.88 | 2.83 | 2.78 | 2.73 | 2.70 | 2.67 | 2.63 | 2.60 | 2.56 | 2.53 | 2.50 | 2.48 | 2.46 | 2.44 | 2.42 |
| 8 | 3.30 | 3.11 | 2.92 | 2.81 | 2.73 | 2.67 | 2.62 | 2.57 | 2.53 | 2.50 | 2.46 | 2.43 | 2.40 | 2.37 | 2.34 | 2.32 | 2.30 | 2.28 | 2.26 |
| 9 | 3.16 | 2.97 | 2.78 | 2.66 | 2.58 | 2.52 | 2.47 | 2.42 | 2.38 | 2.35 | 2.31 | 2.28 | 2.24 | 2.21 | 2.18 | 2.16 | 2.14 | 2.12 | 2.10 |
| 10 | 3.07 | 2.87 | 2.68 | 2.56 | 2.48 | 2.42 | 2.37 | 2.32 | 2.28 | 2.25 | 2.21 | 2.18 | 2.14 | 2.11 | 2.08 | 2.06 | 2.04 | 2.02 | 2.00 |
| 11 | 3.00 | 2.80 | 2.61 | 2.49 | 2.41 | 2.35 | 2.30 | 2.25 | 2.21 | 2.18 | 2.14 | 2.11 | 2.07 | 2.04 | 2.01 | 1.99 | 1.97 | 1.95 | 1.93 |
| 12 | 2.94 | 2.74 | 2.55 | 2.43 | 2.35 | 2.29 | 2.24 | 2.19 | 2.15 | 2.12 | 2.08 | 2.05 | 2.01 | 1.98 | 1.95 | 1.93 | 1.91 | 1.89 | 1.87 |
| 13 | 2.89 | 2.69 | 2.50 | 2.38 | 2.30 | 2.24 | 2.19 | 2.14 | 2.10 | 2.07 | 2.03 | 2.00 | 1.96 | 1.93 | 1.90 | 1.88 | 1.86 | 1.84 | 1.82 |
| 14 | 2.85 | 2.65 | 2.46 | 2.34 | 2.26 | 2.20 | 2.15 | 2.10 | 2.06 | 2.03 | 1.99 | 1.96 | 1.92 | 1.89 | 1.86 | 1.84 | 1.82 | 1.80 | 1.78 |
| 15 | 2.81 | 2.61 | 2.42 | 2.30 | 2.22 | 2.16 | 2.11 | 2.06 | 2.02 | 1.99 | 1.95 | 1.92 | 1.88 | 1.85 | 1.82 | 1.80 | 1.78 | 1.76 | 1.74 |
| 16 | 2.78 | 2.58 | 2.39 | 2.27 | 2.19 | 2.13 | 2.08 | 2.03 | 1.99 | 1.96 | 1.92 | 1.89 | 1.85 | 1.82 | 1.79 | 1.77 | 1.75 | 1.73 | 1.71 |
| 17 | 2.75 | 2.55 | 2.36 | 2.24 | 2.16 | 2.10 | 2.05 | 2.00 | 1.96 | 1.93 | 1.89 | 1.86 | 1.82 | 1.79 | 1.76 | 1.74 | 1.72 | 1.70 | 1.68 |
| 18 | 2.72 | 2.52 | 2.33 | 2.21 | 2.13 | 2.07 | 2.02 | 1.97 | 1.93 | 1.90 | 1.86 | 1.83 | 1.79 | 1.76 | 1.73 | 1.71 | 1.69 | 1.67 | 1.65 |
| 19 | 2.69 | 2.49 | 2.30 | 2.18 | 2.10 | 2.04 | 1.99 | 1.94 | 1.90 | 1.87 | 1.83 | 1.80 | 1.76 | 1.73 | 1.70 | 1.68 | 1.66 | 1.64 | 1.62 |
| 20 | 2.67 | 2.47 | 2.28 | 2.16 | 2.08 | 2.02 | 1.97 | 1.92 | 1.88 | 1.85 | 1.81 | 1.78 | 1.74 | 1.71 | 1.68 | 1.66 | 1.64 | 1.62 | 1.60 |
| 21 | 2.65 | 2.45 | 2.26 | 2.14 | 2.06 | 2.00 | 1.95 | 1.90 | 1.86 | 1.83 | 1.79 | 1.76 | 1.72 | 1.69 | 1.66 | 1.64 | 1.62 | 1.60 | 1.58 |
| 22 | 2.63 | 2.43 | 2.24 | 2.12 | 2.04 | 1.98 | 1.93 | 1.88 | 1.84 | 1.81 | 1.77 | 1.74 | 1.70 | 1.67 | 1.64 | 1.62 | 1.60 | 1.58 | 1.56 |
| 23 | 2.61 | 2.41 | 2.22 | 2.10 | 2.02 | 1.96 | 1.91 | 1.86 | 1.82 | 1.79 | 1.75 | 1.72 | 1.68 | 1.65 | 1.62 | 1.60 | 1.58 | 1.56 | 1.54 |
| 24 | 2.59 | 2.39 | 2.20 | 2.08 | 2.00 | 1.94 | 1.89 | 1.84 | 1.80 | 1.77 | 1.73 | 1.70 | 1.66 | 1.63 | 1.60 | 1.58 | 1.56 | 1.54 | 1.52 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|--------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 35 | 173.92 | 2.53 | 2.32 | 2.18 | 1.68 | 2.02 | 1.87 | 1.91 | 1.89 | 1.87 | 1.82 | 1.77 | 1.72 | 1.69 | 1.66 | 1.63 | 1.69 | 1.56 |
| 36 | 172.91 | 2.53 | 2.31 | 2.17 | 1.66 | 2.01 | 1.96 | 1.92 | 1.88 | 1.86 | 1.81 | 1.76 | 1.71 | 1.68 | 1.65 | 1.61 | 1.58 | 1.54 |
| 37 | 2.90 | 2.51 | 2.30 | 2.17 | 1.67 | 2.00 | 1.95 | 1.91 | 1.87 | 1.85 | 1.80 | 1.75 | 1.70 | 1.67 | 1.64 | 1.60 | 1.57 | 1.53 |
| 38 | 172.89 | 2.50 | 2.29 | 2.16 | 1.66 | 2.00 | 1.94 | 1.90 | 1.87 | 1.84 | 1.79 | 1.74 | 1.69 | 1.66 | 1.63 | 1.59 | 1.56 | 1.52 |
| 39 | 172.88 | 2.50 | 2.28 | 2.15 | 1.66 | 1.99 | 1.93 | 1.89 | 1.86 | 1.83 | 1.78 | 1.73 | 1.68 | 1.65 | 1.62 | 1.58 | 1.55 | 1.51 |
| 40 | 172.88 | 2.49 | 2.28 | 2.14 | 1.65 | 1.98 | 1.93 | 1.88 | 1.85 | 1.82 | 1.77 | 1.72 | 1.67 | 1.64 | 1.61 | 1.57 | 1.54 | 1.50 |
| 41 | 172.84 | 2.44 | 2.23 | 2.09 | 1.60 | 1.93 | 1.87 | 1.83 | 1.79 | 1.76 | 1.71 | 1.66 | 1.61 | 1.57 | 1.54 | 1.51 | 1.47 | 1.42 |
| 42 | 2.79 | 2.39 | 2.18 | 2.04 | 1.46 | 1.87 | 1.82 | 1.77 | 1.74 | 1.71 | 1.66 | 1.60 | 1.54 | 1.51 | 1.48 | 1.44 | 1.40 | 1.35 |
| 43 | 2.75 | 2.35 | 2.13 | 1.99 | 1.40 | 1.82 | 1.77 | 1.71 | 1.68 | 1.65 | 1.60 | 1.54 | 1.48 | 1.45 | 1.41 | 1.37 | 1.32 | 1.26 |
| 44 | 2.71 | 2.30 | 2.08 | 1.94 | 1.35 | 1.77 | 1.72 | 1.67 | 1.63 | 1.60 | 1.55 | 1.49 | 1.42 | 1.38 | 1.34 | 1.30 | 1.24 | 1.17 |

Upper 6 incisor points

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1 | 161 | 200 | 216 | 225 | 230 | 234 | 237 | 239 | 241 | 242 | 244 | 246 | 248 | 249 | 250 | 251 | 252 | 253 | 254 |
| 2 | 18.5 | 29.0 | 29.2 | 19.2 | 17.3 | 19.2 | 19.4 | 19.4 | 19.4 | 19.4 | 19.4 | 19.4 | 19.4 | 19.5 | 19.5 | 19.5 | 19.5 | 19.5 | 19.5 |
| 3 | 10.11 | 8.55 | 9.28 | 9.12 | 8.01 | 8.94 | 8.89 | 8.85 | 8.81 | 8.78 | 8.74 | 8.70 | 8.66 | 8.64 | 8.62 | 8.59 | 8.57 | 8.56 | 8.55 |
| 4 | 7.71 | 6.94 | 6.69 | 6.39 | 6.28 | 6.16 | 6.09 | 6.04 | 6.00 | 5.96 | 5.91 | 5.86 | 5.80 | 5.77 | 5.76 | 5.72 | 5.69 | 5.66 | 5.65 |
| 5 | 6.01 | 5.79 | 5.41 | 5.19 | 5.06 | 4.96 | 4.88 | 4.82 | 4.77 | 4.74 | 4.68 | 4.62 | 4.56 | 4.53 | 4.50 | 4.46 | 4.43 | 4.40 | 4.38 |
| 6 | 5.99 | 5.14 | 4.76 | 4.53 | 4.29 | 4.28 | 4.21 | 4.16 | 4.19 | 4.09 | 4.00 | 3.94 | 3.87 | 3.84 | 3.81 | 3.77 | 3.74 | 3.70 | 3.68 |
| 7 | 5.69 | 4.74 | 4.26 | 4.12 | 3.97 | 3.87 | 3.79 | 3.73 | 3.68 | 3.64 | 3.67 | 3.61 | 3.44 | 3.41 | 3.38 | 3.34 | 3.30 | 3.27 | 3.25 |
| 8 | 5.22 | 4.46 | 4.07 | 3.84 | 3.69 | 3.66 | 3.60 | 3.44 | 3.39 | 3.35 | 3.28 | 3.22 | 3.15 | 3.12 | 3.08 | 3.04 | 3.01 | 2.97 | 2.95 |
| 9 | 5.12 | 4.26 | 3.60 | 3.62 | 3.48 | 3.37 | 3.29 | 3.22 | 3.18 | 3.14 | 3.07 | 3.01 | 2.94 | 2.90 | 2.86 | 2.83 | 2.79 | 2.75 | 2.72 |
| 10 | 4.96 | 4.10 | 3.71 | 3.48 | 3.33 | 3.22 | 3.14 | 3.07 | 3.02 | 2.98 | 2.91 | 2.85 | 2.77 | 2.74 | 2.70 | 2.66 | 2.62 | 2.60 | 2.58 |
| 11 | 4.84 | 3.98 | 3.59 | 3.36 | 3.20 | 3.09 | 3.01 | 2.95 | 2.90 | 2.86 | 2.79 | 2.72 | 2.65 | 2.61 | 2.57 | 2.53 | 2.49 | 2.46 | 2.44 |
| 12 | 4.76 | 3.89 | 3.49 | 3.26 | 3.11 | 3.00 | 2.91 | 2.86 | 2.80 | 2.76 | 2.69 | 2.62 | 2.54 | 2.51 | 2.47 | 2.43 | 2.38 | 2.34 | 2.32 |
| 13 | 4.67 | 3.81 | 3.41 | 3.18 | 3.03 | 2.92 | 2.83 | 2.77 | 2.71 | 2.67 | 2.60 | 2.53 | 2.46 | 2.42 | 2.38 | 2.34 | 2.30 | 2.26 | 2.24 |
| 14 | 4.60 | 3.74 | 3.34 | 3.11 | 2.96 | 2.85 | 2.76 | 2.70 | 2.65 | 2.60 | 2.53 | 2.46 | 2.39 | 2.35 | 2.31 | 2.27 | 2.22 | 2.18 | 2.16 |
| 15 | 4.54 | 3.68 | 3.28 | 3.04 | 2.89 | 2.78 | 2.71 | 2.64 | 2.60 | 2.54 | 2.48 | 2.40 | 2.33 | 2.30 | 2.26 | 2.20 | 2.16 | 2.11 | 2.09 |
| 16 | 4.49 | 3.63 | 3.23 | 3.01 | 2.85 | 2.74 | 2.66 | 2.60 | 2.54 | 2.49 | 2.42 | 2.35 | 2.28 | 2.24 | 2.19 | 2.15 | 2.11 | 2.06 | 2.04 |
| 17 | 4.45 | 3.59 | 3.20 | 2.96 | 2.81 | 2.70 | 2.61 | 2.55 | 2.49 | 2.45 | 2.38 | 2.31 | 2.23 | 2.19 | 2.15 | 2.10 | 2.06 | 2.01 | 1.99 |
| 18 | 4.41 | 3.55 | 3.16 | 2.92 | 2.77 | 2.66 | 2.58 | 2.51 | 2.46 | 2.41 | 2.34 | 2.27 | 2.19 | 2.15 | 2.11 | 2.06 | 2.02 | 1.97 | 1.95 |
| 19 | 4.38 | 3.52 | 3.13 | 2.90 | 2.74 | 2.63 | 2.54 | 2.48 | 2.42 | 2.38 | 2.31 | 2.23 | 2.16 | 2.11 | 2.07 | 2.03 | 1.98 | 1.93 | 1.91 |

Table IV. F Distribution (Continued)

| Degrees of freedom for the numerator | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|--|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 25 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ | |
| Upper 5 per cent points | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 20 | 1.73 | 1.48 | 1.36 | 1.27 | 1.21 | 1.16 | 1.11 | 1.07 | 1.03 | 1.00 | 0.97 | 0.94 | 0.91 | 0.88 | 0.85 | 0.82 | 0.80 | 0.77 | 0.75 | |
| 25 | 1.61 | 1.36 | 1.24 | 1.15 | 1.09 | 1.04 | 0.99 | 0.95 | 0.91 | 0.88 | 0.85 | 0.82 | 0.79 | 0.76 | 0.73 | 0.70 | 0.68 | 0.65 | 0.63 | |
| 30 | 1.51 | 1.26 | 1.14 | 1.05 | 0.99 | 0.94 | 0.89 | 0.85 | 0.81 | 0.78 | 0.75 | 0.72 | 0.69 | 0.66 | 0.63 | 0.60 | 0.58 | 0.55 | 0.53 | |
| 40 | 1.38 | 1.13 | 1.01 | 0.92 | 0.86 | 0.81 | 0.76 | 0.72 | 0.68 | 0.65 | 0.62 | 0.59 | 0.56 | 0.53 | 0.50 | 0.47 | 0.45 | 0.42 | 0.40 | |
| 60 | 1.27 | 1.02 | 0.90 | 0.81 | 0.75 | 0.70 | 0.65 | 0.61 | 0.57 | 0.54 | 0.51 | 0.48 | 0.45 | 0.42 | 0.39 | 0.36 | 0.34 | 0.31 | 0.29 | |
| 120 | 1.17 | 0.92 | 0.80 | 0.71 | 0.65 | 0.60 | 0.55 | 0.51 | 0.47 | 0.44 | 0.41 | 0.38 | 0.35 | 0.32 | 0.29 | 0.26 | 0.24 | 0.21 | 0.19 | |
| ∞ | 1.00 | 0.75 | 0.63 | 0.54 | 0.48 | 0.43 | 0.38 | 0.34 | 0.30 | 0.27 | 0.24 | 0.21 | 0.18 | 0.15 | 0.12 | 0.10 | 0.08 | 0.05 | 0.03 | |
| Upper 1 per cent points | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 40.52 | 16.00 | 14.03 | 12.85 | 11.64 | 10.59 | 9.58 | 8.58 | 7.58 | 6.58 | 5.58 | 4.58 | 3.58 | 2.58 | 1.58 | 0.58 | 0.33 | 0.11 | 0.02 | |
| 2 | 34.5 | 14.0 | 12.03 | 10.85 | 9.64 | 8.59 | 7.58 | 6.58 | 5.58 | 4.58 | 3.58 | 2.58 | 1.58 | 0.58 | 0.33 | 0.11 | 0.06 | 0.04 | 0.01 | |
| 3 | 31.1 | 13.0 | 11.03 | 9.85 | 8.64 | 7.59 | 6.58 | 5.58 | 4.58 | 3.58 | 2.58 | 1.58 | 0.58 | 0.33 | 0.11 | 0.06 | 0.04 | 0.03 | 0.00 | |
| 4 | 28.2 | 12.0 | 10.03 | 8.85 | 7.64 | 6.59 | 5.58 | 4.58 | 3.58 | 2.58 | 1.58 | 0.58 | 0.33 | 0.11 | 0.06 | 0.04 | 0.03 | 0.02 | 0.00 | |
| 5 | 26.1 | 11.0 | 9.03 | 7.85 | 6.64 | 5.59 | 4.58 | 3.58 | 2.58 | 1.58 | 0.58 | 0.33 | 0.11 | 0.06 | 0.04 | 0.03 | 0.02 | 0.01 | 0.00 | |
| 6 | 24.5 | 10.0 | 8.03 | 6.85 | 5.64 | 4.59 | 3.58 | 2.58 | 1.58 | 0.58 | 0.33 | 0.11 | 0.06 | 0.04 | 0.03 | 0.02 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 7 | 12.7 | 9.65 | 8.46 | 7.85 | 7.46 | 7.19 | 6.99 | 6.84 | 6.72 | 6.62 | 6.47 | 6.31 | 6.16 | 6.07 | 5.99 | 5.91 | 5.82 | 5.74 | 5.66 |
| 8 | 11.1 | 8.65 | 7.69 | 7.01 | 6.63 | 6.37 | 6.18 | 6.03 | 5.91 | 5.82 | 5.67 | 5.52 | 5.36 | 5.28 | 5.20 | 5.11 | 5.03 | 4.95 | 4.88 |
| 9 | 10.4 | 8.01 | 6.98 | 6.42 | 6.06 | 5.80 | 5.61 | 5.47 | 5.35 | 5.26 | 5.11 | 4.96 | 4.81 | 4.73 | 4.65 | 4.57 | 4.48 | 4.40 | 4.31 |
| 10 | 10.0 | 7.58 | 6.68 | 6.09 | 5.64 | 5.39 | 5.20 | 5.06 | 4.94 | 4.85 | 4.71 | 4.56 | 4.41 | 4.33 | 4.25 | 4.17 | 4.08 | 4.00 | 3.91 |
| 11 | 9.65 | 7.21 | 6.32 | 5.67 | 5.32 | 5.07 | 4.89 | 4.74 | 4.63 | 4.54 | 4.40 | 4.26 | 4.10 | 4.02 | 3.94 | 3.86 | 3.78 | 3.69 | 3.60 |
| 12 | 9.33 | 6.93 | 6.06 | 5.41 | 5.06 | 4.82 | 4.64 | 4.50 | 4.39 | 4.30 | 4.16 | 4.01 | 3.86 | 3.78 | 3.70 | 3.62 | 3.54 | 3.45 | 3.36 |
| 13 | 9.07 | 6.70 | 5.74 | 5.21 | 4.86 | 4.63 | 4.44 | 4.30 | 4.19 | 4.10 | 3.96 | 3.82 | 3.66 | 3.59 | 3.51 | 3.42 | 3.34 | 3.25 | 3.17 |
| 14 | 8.86 | 6.51 | 5.56 | 5.04 | 4.70 | 4.46 | 4.28 | 4.14 | 4.03 | 3.94 | 3.80 | 3.66 | 3.51 | 3.43 | 3.35 | 3.27 | 3.18 | 3.09 | 3.00 |
| 15 | 8.68 | 6.36 | 5.42 | 4.89 | 4.56 | 4.32 | 4.14 | 4.00 | 3.89 | 3.80 | 3.67 | 3.52 | 3.37 | 3.29 | 3.21 | 3.13 | 3.05 | 2.96 | 2.87 |
| 16 | 8.53 | 6.23 | 5.29 | 4.77 | 4.44 | 4.20 | 4.03 | 3.89 | 3.78 | 3.69 | 3.55 | 3.41 | 3.26 | 3.18 | 3.10 | 3.02 | 2.93 | 2.84 | 2.75 |
| 17 | 8.40 | 6.11 | 5.19 | 4.67 | 4.34 | 4.10 | 3.93 | 3.79 | 3.68 | 3.59 | 3.46 | 3.31 | 3.16 | 3.08 | 3.00 | 2.92 | 2.83 | 2.75 | 2.65 |
| 18 | 8.29 | 6.01 | 5.09 | 4.58 | 4.25 | 4.01 | 3.84 | 3.71 | 3.60 | 3.51 | 3.37 | 3.23 | 3.08 | 3.00 | 2.92 | 2.84 | 2.75 | 2.66 | 2.57 |
| 19 | 8.19 | 5.93 | 5.01 | 4.50 | 4.17 | 3.94 | 3.77 | 3.63 | 3.52 | 3.43 | 3.30 | 3.16 | 3.00 | 2.92 | 2.84 | 2.76 | 2.67 | 2.58 | 2.49 |
| 20 | 8.10 | 5.85 | 4.94 | 4.43 | 4.10 | 3.87 | 3.70 | 3.56 | 3.46 | 3.37 | 3.23 | 3.09 | 2.94 | 2.86 | 2.78 | 2.69 | 2.61 | 2.52 | 2.43 |
| 21 | 8.02 | 5.78 | 4.87 | 4.37 | 4.04 | 3.81 | 3.64 | 3.51 | 3.40 | 3.31 | 3.17 | 3.03 | 2.88 | 2.80 | 2.72 | 2.64 | 2.55 | 2.46 | 2.36 |
| 22 | 7.95 | 5.72 | 4.82 | 4.31 | 3.99 | 3.76 | 3.59 | 3.45 | 3.35 | 3.26 | 3.12 | 2.98 | 2.83 | 2.75 | 2.67 | 2.58 | 2.50 | 2.40 | 2.31 |
| 23 | 7.88 | 5.66 | 4.76 | 4.26 | 3.94 | 3.71 | 3.54 | 3.41 | 3.30 | 3.21 | 3.07 | 2.93 | 2.78 | 2.70 | 2.62 | 2.54 | 2.45 | 2.35 | 2.26 |
| 24 | 7.82 | 5.61 | 4.72 | 4.22 | 3.90 | 3.67 | 3.50 | 3.36 | 3.26 | 3.17 | 3.03 | 2.89 | 2.74 | 2.66 | 2.58 | 2.49 | 2.40 | 2.31 | 2.21 |
| 25 | 7.77 | 5.57 | 4.68 | 4.18 | 3.86 | 3.63 | 3.46 | 3.32 | 3.22 | 3.13 | 2.99 | 2.85 | 2.70 | 2.62 | 2.54 | 2.45 | 2.36 | 2.27 | 2.17 |
| 26 | 7.72 | 5.53 | 4.64 | 4.14 | 3.83 | 3.60 | 3.43 | 3.29 | 3.18 | 3.09 | 2.96 | 2.82 | 2.66 | 2.58 | 2.50 | 2.42 | 2.33 | 2.23 | 2.13 |
| 27 | 7.68 | 5.49 | 4.60 | 4.11 | 3.78 | 3.56 | 3.39 | 3.26 | 3.15 | 3.06 | 2.93 | 2.78 | 2.63 | 2.55 | 2.47 | 2.38 | 2.29 | 2.20 | 2.10 |
| 28 | 7.64 | 5.45 | 4.57 | 4.07 | 3.76 | 3.53 | 3.36 | 3.23 | 3.12 | 3.03 | 2.90 | 2.75 | 2.60 | 2.52 | 2.44 | 2.35 | 2.26 | 2.17 | 2.06 |
| 29 | 7.60 | 5.42 | 4.54 | 4.04 | 3.73 | 3.50 | 3.33 | 3.20 | 3.09 | 3.00 | 2.87 | 2.72 | 2.57 | 2.49 | 2.41 | 2.32 | 2.23 | 2.14 | 2.03 |
| 30 | 7.56 | 5.39 | 4.51 | 4.02 | 3.70 | 3.47 | 3.30 | 3.17 | 3.07 | 2.98 | 2.84 | 2.70 | 2.55 | 2.47 | 2.39 | 2.30 | 2.21 | 2.11 | 2.01 |
| 40 | 7.31 | 5.13 | 4.31 | 3.83 | 3.51 | 3.29 | 3.12 | 2.99 | 2.89 | 2.80 | 2.66 | 2.52 | 2.37 | 2.29 | 2.20 | 2.11 | 2.02 | 1.92 | 1.80 |
| 60 | 7.08 | 4.98 | 4.13 | 3.65 | 3.34 | 3.12 | 2.95 | 2.82 | 2.72 | 2.63 | 2.50 | 2.35 | 2.20 | 2.12 | 2.03 | 1.94 | 1.84 | 1.73 | 1.60 |
| 120 | 6.85 | 4.79 | 3.95 | 3.46 | 3.17 | 2.96 | 2.79 | 2.66 | 2.56 | 2.47 | 2.34 | 2.19 | 2.03 | 1.95 | 1.86 | 1.76 | 1.66 | 1.53 | 1.38 |
| - | 6.63 | 4.61 | 3.78 | 3.31 | 3.02 | 2.80 | 2.64 | 2.51 | 2.41 | 2.32 | 2.18 | 2.04 | 1.88 | 1.79 | 1.70 | 1.59 | 1.47 | 1.32 | 1.00 |

Source: By permission of Prof. E. R. Pearson, from M. McWhorter and C. M. Thompson, "Tables of Percentage Points of the Inverted Beta (T) Distribution," *Biometrika*, vol. 33, p. 71, 1941.

المحتويات

| رقم الصفحة | الموضوع |
|------------|--|
| 3 | مقدمة |
| | الفصل الأول |
| 5 | تعريف علم الإحصاء وعلاقته بالعلوم الأخرى |
| 7 | تمهيد |
| 7 | أولاً : تعريف علم الإحصاء |
| 9 | ثانياً : خصائص علم الإحصاء |
| 9 | ثالثاً : وظائف علم الإحصاء |
| 10 | علاقة علم الإحصاء بالعلوم الأخرى |
| 11 | 1- العلاقة بين علم الإحصاء وعلم الاقتصاد |
| 12 | 2- العلاقة بين علم الإحصاء وعلم الإدارة |
| 12 | 3- العلاقة بين علم الإحصاء وعلم المحاسبة |
| 13 | 4- العلاقة بين علم الإحصاء والرياضة |
| | 5- العلاقة بين علم الإحصاء وعلم الرياضة وعلم |
| 13 | الاقتصاد |

الفصل الثاني

| | |
|----|--|
| 15 | مراحل البحث الإحصائي |
| | 1- تحديد الهدف من البحث أو وضع الفروض |
| 17 | الإحصائية |
| 17 | 2- تحديد المجتمع المراد جمع البيانات عنه |

| الموضوع | رقم الصفحة |
|--|------------|
| 3- تحديد مصادر البيانات | 17 |
| 4- التجهيز لعملية جمع البيانات الميدانية | 18 |
| 5- تصنيف وتجهيز البيانات | 20 |
| 6- عرض البيانات وتحليلها إحصائياً | 20 |
| العينات | 21 |
| أنواع العينات | 21 |
| أولاً : العينات الاحتمالية | 22 |
| العينة العشوائية البسيطة | 22 |
| العينة العشوائية المنتظمة | 22 |
| العينة الطبقية | 24 |
| العينة متعددة المراحل | 24 |
| ثانياً : العينات غير الاحتمالية | 24 |
| أنواع الأخطاء | 26 |
| أخطاء المعاينة | 26 |
| أخطاء التحيز | 26 |
| تبويب وعرض البيانات الإحصائية | 27 |
| العرض الجدولي | 27 |
| جداول عامة | 27 |
| جداول خاصة | 27 |
| جدول التوزيع التكرارى | 28 |
| التمثيل البياني | 33 |
| البيانات الخام | 33 |
| طريقة الخط البياني | 34 |

| رقم الصفحة | الموضوع |
|------------|---------------------------------|
| 35 | طريقة الأعمدة |
| 36 | طريقة الدائرة |
| 38 | البيانات المبوبة |
| 38 | المدرج التكرارى |
| 40 | المضلع التكرارى |
| 42 | المنحنى التكرارى |
| 43 | المنحنى التكرارى المتجمع الهابط |
| 44 | المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد |
| | الفصل الثالث |
| | مقاييس النزعة المركزية |
| 51 | |
| 53 | تمهيد |
| 54 | الوسط الحسابى |
| 70 | الوسيط |
| 76 | المنوال |
| 83 | الوسط الهندسى |
| 88 | المتوسط الموزون |
| | الفصل الرابع |
| | مقاييس التشتت |
| 93 | |
| 95 | تمهيد |
| 96 | المدى |
| 96 | الانحراف المربيعى |

| رقم الصفحة | الموضوع |
|------------|-------------------|
| 100 | الانحراف المتوسط |
| 103 | الانحراف المعياري |
| 113 | معامل الاختلاف |

الفصل الخامس

الارتباط

| | |
|-----|--|
| 119 | |
| 121 | تمهيد |
| 123 | خصائص معامل الارتباط |
| 123 | حساب معامل الارتباط الخطى (بيرسون) |
| 123 | الطريقة المباشرة |
| 124 | طريقة الانحرافات البسيطة |
| 124 | طريقة الانحرافات المختصرة |
| 126 | معامل ارتباط الرتب (سبيرمان) |
| | حساب معامل ارتباط الرتب فى حالة البيانات |
| 131 | الكمية |
| 132 | اختبار معنوية معامل الارتباط |

الفصل السادس

الانحدار

| | |
|-----|--|
| 137 | |
| 139 | تمهيد |
| 140 | طريقة المربعات الصغرى لتوفيق الخط المستقيم |
| 140 | معادلة انحدار ص على س |
| 148 | العلاقة بين معامل الارتباط ومعامل الانحدار |

| رقم الصفحة | الموضوع |
|------------|---------------------------------------|
| 151 | طريقة العزوم لحساب معادلة خط الانحدار |
| 152 | اختبار معنوية معامل الانحدار |
| 160 | خطأ التقدير |
| 165 | معادلة الاتجاه العام الزمني |
| 168 | التطبيق على السلاسل الزمنية |
| | الفصل السابع |
| | مبادئ الاحتمالات |
| 183 | |
| 185 | تمهيد |
| 185 | التباديل |
| 188 | التوافيق |
| 194 | نظرية ذات الحدين |
| 201 | الاحتمالات البسيطة |
| 205 | الاحتمالات المركبة |
| 206 | قانون جمع الاحتمالات |
| 207 | جمع الاحتمالات للحوادث المانعة |
| 208 | جمع الاحتمالات للحوادث غير المانعة |
| 209 | قانون ضرب الاحتمالات |
| 209 | ضرب الاحتمالات للحوادث المستقلة |
| 211 | ضرب الاحتمالات للحوادث غير المستقلة |
| 216 | التوزيعات الاحتمالية |
| 216 | أولاً : توزيع ذو الحدين |
| 224 | ثانياً : توزيع بواسون |

| الموضوع | رقم الصفحة |
|---|------------|
| ثالثاً : التوزيع الطبيعي | 225 |
| الفصل الثامن | |
| الأرقام القياسية | 263 |
| تمهيد | 265 |
| أنواع الأرقام القياسية | 266 |
| أولاً : الرقم القياسى البسيط | 266 |
| 1- الرقم القياسى البسيط للأسعار | 266 |
| 2- الرقم القياسى البسيط للكميات | 267 |
| 3- الرقم القياسى البسيط للقيمة | 267 |
| ثانياً : الأرقام القياسية التجميعية البسيطة | 269 |
| أ- الرقم القياسى التجميعى للأسعار | 269 |
| ب- الرقم القياسى التجميعى المرجح | 270 |
| 1- الرقم القياسى المرجح بكمية سنة الأساس | |
| (رقم لاسبير) | 270 |
| 2- الرقم القياسى المرجح بكمية سنة المقارنة | |
| (رقم باش) | 270 |
| 3- رقم دروبش وبالى القياسى | 271 |
| 4- رقم فيشر القياسى المثالى | 271 |
| 5- رقم مارشال وإدجورث | 271 |
| ثالثاً : المتوسطات البسيطة للمناسيب | 276 |
| 1- الوسط الحسابى البسيط لمناسيب الأسعار | 276 |
| 2- الوسط الهندسى البسيط لمناسيب الأسعار | 278 |

| الموضوع | رقم الصفحة |
|-------------------------------------|------------|
| 3- الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة | 279 |
| اختبار الأرقام القياسية | 282 |
| أولاً : اختبار الانعكاس فى الزمن | 282 |
| ثانياً : اختبار الانعكاس فى المعامل | 283 |
| تغيير فترة الأساس | 288 |
| الأرقام القياسية للتجارة الخارجية | 291 |
| المراجع | 301 |
| مراجع باللغة العربية | 303 |
| مراجع باللغة الأجنبية | 303 |
| الملحق | 307 |
| الجداول الإحصائية | 309 |
| المحتويات | 317 |



رقم الإيداع : 2013/24053
الترقيم الدولي : 2-082-735-977-978

مع تحيات
دار الوفاء لدنيا الطباعة والنشر
تليفاكس: 5404480 - الإسكندرية







المؤلف

الدكتور / جابر أحمد بسيوني شحاته

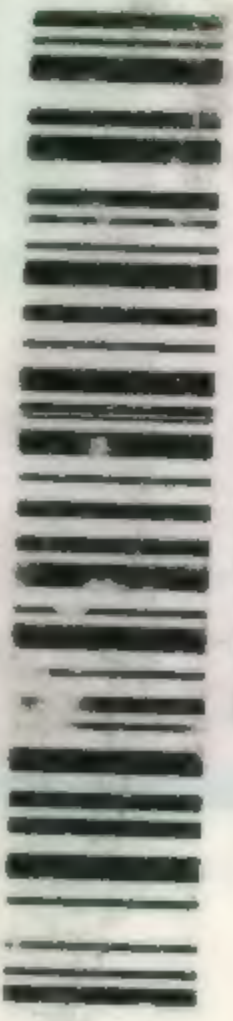
أستاذ الإقتصاد الزراعي بكلية الزراعة (سابا باشا) - جامعة الإسكندرية

- تخرج من كلية الزراعة (سابا باشا) - جامعة الإسكندرية .
- تدرج من وظيفة معيد إلى وظيفة أستاذ بقسم الإقتصاد الزراعي ثم رئيساً لذات القسم بكلية الزراعة (سابا باشا) - جامعة الإسكندرية
- نشر له أكثر من ستين بحثاً محلياً وعالمياً في مجال التخصص .
- عضو اللجنة العلمية الدائمة لترقية أعضاء هيئة التدريس الاساتذة والاساتذة المساعدين تخصص الإقتصاد الزراعي والإرشاد والمجتمع الريفي .
- شارك في العديد من المؤتمرات والندوات العلمية المحلية والإقليمية والعالمية .
- ساهم في الإشراف علي ومناقشة العديد من رسائل الماجستير والدكتوراه محلياً وإقليمياً .
- قام بإعداد العديد من المؤلفات في مجال التخصص مثل :
مبادئ الإقتصاد - التنمية الزراعية - الإحصاء التطبيقي
نظرية الدوال والمعادلات التفاضلية - المصفوفات والمحددات ونظرية الاحتمالات
الاتجاهات الحديثة في إدارة الجودة الشاملة - الاتجاهات المعاصرة في التسويق الزراعي
 وإدارة الجودة الشاملة .

هذا الكتاب

يتناول الموضوعات التالية : التعريف بعلم الإحصاء وعلاقته بالعلوم الأخرى، ومراحل البحث الإحصائي، ومقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت، وتحليل الارتباط ، وتحليل الانحدار ، والتوزيعات الإحصائية ، ونظرية الاحتمالات، والأرقام القياسية .

Bibliotheca Alexandrina



1240456

الناشر

دار الوفاء لدينيا للطباعة والنشر
٥٩ ش محمود صدقي متفرع من العيسوي سيدي بشر - الإسكندرية
تليفاكس : ٠٠٢٠٣ / ٥٤٠٤٤٨٠ - الاسكندرية

ISBN:977-735-082-2



9 789777 350822